

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 396. Band

Kuratorium:

F. Paschen M. Planck R. Pohl
A. Sommerfeld M. Wien E. Warburg

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1930 erscheinen die Bände 4, 5 und 6 mit je 8 Hefen. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 28. Januar 1930.

Inhalt

	Seite
→ R. Peierls-Zürich, Zur Theorie der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von Metallen. (Mit 1 Figur)	121
Hans Funk-München, Über die Ionisierung von Alkaliatomen durch langsame Elektronen. (Mit 13 Figuren)	149
Karl Kellermann-Frankfurt a.M., Ein Verfahren zur Messung von Brechungsexponenten für Röntgenstrahlen. (Mit 13 Figuren) .	185
Konrad Kühne-Jena, Unähnliche Abbildung zur Messung der Durchmesser von Fixsternen u. Ultramikronen. (Mit 10 Figuren)	215
→ E. Perucca-Torino, Elektrische Leitfähigkeit kathodenzerstäubter metallischer Schichten. (Mit 8 Figuren)	252
Johannes Picht-Neubabelsberg, Über die Richtung der Energieströmung in einer Zylinderwelle. (Mitteilung aus dem Institut der Einstein-Stiftung, Potsdam.) (Mit 9 Figuren)	273

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grüneisen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.



C
f
f
C
V
f
a
d
n
w
z
a
M
L
—

u.

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1930, BAND 4, HEFT 2

Zur Theorie der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von Metallen

Von R. Peierls

(Mit 1 Figur)

Einleitung

Die Frage nach dem *Mechanismus* der Elektronenbewegung in Metallen ist seit den Untersuchungen von Bloch¹⁾ als ziemlich abgeschlossen anzusehen. Es wurde dort u. a. gezeigt, daß sich ein Elektron in einem rein periodischen Kraftfeld ungehindert bewegen kann, daß also ein Widerstand immer erst durch die thermische Bewegung des Gitters zustande kommt. Die Verhältnisse liegen ähnlich wie bei der Streuung von Röntgenstrahlen; Houston²⁾ und Frenkel³⁾ versuchten, die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und den Gitterschwingungen genau analog zu der bekannten Beugungstheorie für Röntgenstrahlen zu behandeln. Bloch zeigte jedoch, daß der Houstonsche Ansatz nicht gestattet, in richtiger Weise von dem Pauliprinzip Gebrauch zu machen, und daher nur für den Grenzfall $T \gg \Theta$ anwendbar ist. Bloch gab einen anderen Ansatz für die Behandlung dieser Wechselwirkung, der jedoch, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch noch nicht ganz dem physikalischen Sachverhalt entspricht. Wir werden hier eine Modifikation seines Ansatzes geben, die auch zu einem etwas anderen Resultat bezüglich der Temperaturabhängigkeit bei tiefen Temperaturen führen wird. Die gleiche Methode soll dann ferner zur Berechnung der thermischen Leitfähigkeit angewandt werden.

1) F. Bloch, *Ztschr. f. Phys.* **52**. S. 555. 1928; im Erscheinen.

2) W. V. Houston, *Ztschr. f. Phys.* **48**. S. 449. 1928.

3) J. Frenkel, *Ztschr. f. Phys.* **47**. S. 819. 1928; sowie J. Frenkel u. N. Mirulobow, *Ztschr. f. Phys.* **49**. S. 885. 1928.

Die Modifikation, die hier vorgenommen werden soll, beruht auf folgendem Umstand: Bloch hatte so gerechnet, als ob das Gitter sich stets, unabhängig von der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen, im thermischen Gleichgewicht befindet. Um die Berechtigung dieser Annahme untersuchen zu können, muß erst die folgende Frage beantwortet werden: Angenommen, die Gitterschwingungen seien zu einer gegebenen Zeit nicht im thermischen Gleichgewicht; welche Prozesse tragen dann in erster Linie dazu bei, das Gleichgewicht wiederherzustellen? Es läge nahe, zu vermuten, daß vor allem diejenigen Prozesse dafür verantwortlich sind, die auch beim Isolator, d. h. wenn keine freien Elektronen vorhanden sind, für die Einstellung des Gleichgewichts sorgen. Das ist, wie an anderer Stelle¹⁾ gezeigt wurde, der Energieaustausch der verschiedenen Gitterschwingungen untereinander infolge der Anharmonizitäten der Gitterkräfte. Würden diese Prozesse nämlich das Gleichgewicht sehr viel rascher wiederherstellen können, als es durch die Zusammenstöße mit den Elektronen gestört wird, so wäre die Blochsche Annahme berechtigt. Eine Abschätzung, die wir später geben werden, zeigt jedoch, daß diese Prozesse dazu bei weitem nicht imstande sind, und daß die Wiederherstellung des Gleichgewichts auf anderen Ursachen beruht. Und zwar sind es gerade wieder die Zusammenstöße mit den Elektronen, die für die Statistik des Gitters maßgebend sind.

Man sollte erwarten, daß die Berücksichtigung dieses Sachverhalts die Blochschen Rechnungen nur unerheblich verändert. Die Situation kompliziert sich aber noch durch einen weiteren Umstand: Wir haben ja jetzt Zustände des Gesamtsystems Gitter plus Elektronen zu betrachten. Für dieses System existiert aber in der von Bloch benutzten Näherung ein Integral der Bewegungsgleichungen, das aufs engste mit dem Gesamtimpuls der Elektronen zusammenhängt. Daraus folgt dann unmittelbar, daß in dieser Näherung eine unendliche Leitfähigkeit resultiert. Der Grund hierfür ist derselbe, wie der, der bei der Theorie der Wärmeleitung in

1) R. Peierls, Ann. d. Phys. [5] **3**, S. 1055, 1929, im folgenden als „W“ zitiert.

Kristallen auftrat (W); man hatte die Eigenfunktionen der Elektronen ähnlich zu denen freier Elektronen angesetzt, und die Gitterschwingungen als die Schwingungen eines kontinuierlichen Mediums. Dabei zerstört man jedoch einen wesentlichen Zug des Modells.

Kapitel I: Allgemeine Methode

§ 1. Die Eigenfunktionen der Elektronen

Bloch findet a. a. O. eine Reihe von Tatsachen, die nur von der Periodizität des Gitters abhängen, also von der speziellen Form des Potentialverlaufes unabhängig sind. Man braucht für die Rechnung jedoch einige speziellere Annahmen über die Form der Eigenfunktionen. Sie sind in zwei Fällen bekannt: erstens in dem Grenzfall freier Elektronen, wo es sich um ebene Wellen handelt, und zweitens in dem Grenzfall stark gebundener Elektronen, wo man sie nach Bloch durch ein Störungsverfahren aus den Eigenfunktionen des einzelnen Atoms erhalten kann. Der erste Grenzfall ist für unseren Zweck jedoch nicht brauchbar, weil uns aus den oben angegebenen Gründen gerade die Abweichung der Elektronenbewegung von der kräftefreien interessiert. Von dem zweiten Grenzfall weiß man wegen seiner Konsequenzen für die magnetische Suszeptibilität¹⁾, daß er praktisch nie realisiert ist. Wir benutzen daher das folgende Modell: Die Elektronen seien in „nullter Näherung“ frei. In erster Näherung wird die Einwirkung eines periodischen, störenden Potentials berücksichtigt. Wir wählen im Anschluß an Bloch die folgenden Bezeichnungen: a sei der Atomabstand in dem betrachteten (als einfach kubisch angenommenen) Gitter, aG die Kantenlänge des betrachteten Würfels, $V = (aG)^3$ sein Volumen. Die Koordinatenachsen liegen parallel zu den Kanten des Würfels.

Dann sind die Eigenfunktionen nullter Näherung:

$$(1) \quad \varphi_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot e^{i \frac{(\xi, r)}{a}}, \quad \xi, \eta, \zeta = \frac{2\pi}{G} (0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

(Wir schreiben häufig ξ für den Vektor ξ, η, ζ)

1) W. Pauli, Ztschr. f. Phys. 41. S. 81. 1927 und F. Bloch, Ztschr. f. Phys. 53. S. 216. 1929.

Die zugehörigen Eigenwerte sind:

$$(2) \quad E^0(\xi) = \omega(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + V_0, \quad \omega = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot \frac{1}{a^2}.$$

Die Konstante V_0 wählen wir gleich dem räumlichen Mittelwert des Gitterpotentials. Das Potential des Kristallgitters auf die Elektronen soll die Form haben:

$$(3a) \quad U(x, y, z) = \sum_n F(x - n_1 a, y - n_2 a, z - n_3 a),$$

$$(3b) \quad = \sum u(t) e^{\frac{2\pi i}{a}(t, r)}; \quad k_{x, y, z} = 0, \pm 1 \dots$$

Die Summe in (3a) ist über alle Gitterpunkte zu erstrecken. Wegen der Voraussetzung über V_0 können wir $u(0) = 0$ annehmen. Wir versuchen nun U als kleine Störung zu behandeln. Dazu ist notwendig, daß die Matricelemente von U klein sind gegenüber den zugehörigen Termdifferenzen der ungestörten Zustände. Die Matricelemente von U verschwinden aber immer, wie man leicht aus (1) und (3b) sieht, außer wenn sich die Vektoren in jeder Komponente nur um ganze Vielfache von 2π unterscheiden. Wir denken uns im $\xi\eta\zeta$ -Raum die Ebenen parallel zu den Koordinatenachsen mit den Abständen $\pi, 3\pi, 5\pi$ usw. vom Nullpunkt gezeichnet. Es entsteht so ein System von „Zellen“, wobei dann also nur solche Zustände unter dem Einfluß von (3) miteinander kombinieren, deren $\xi\eta\zeta$ an entsprechenden Punkten verschiedener Zellen liegen. Nehmen wir zunächst an, daß $\xi\eta\zeta$ weder in der Nähe der Grenzfläche einer solchen Zelle, noch in der Nähe der dazwischen liegenden Flächen $\xi = 2\pi, 4\pi \dots$ und $\eta = 2\pi, 4\pi \dots$ usw. liegt, so ist die kleinste mögliche Energiedifferenz zu einem mit $\xi\eta\zeta$ kombinierenden Zustand nach (2) mindestens von der Größenordnung 4 Volt, so daß also die Bedingung für U erfüllbar ist. (Wir lassen es offen, wie weit die wirklichen Gitterpotentiale noch als klein anzusehen sind.) In diesem Falle ist also die übliche Störungsrechnung zulässig, die Eigenwertstörung wird gleich dem Diagonalelement von U . Diese Diagonalelemente sind aber wegen (1) und (3b) sämtlich gleich $u(0)$, verschwinden also.

Diese Methode versagt aber, sobald $\xi\eta\zeta$ in der Nähe einer Grenzfläche liegt, denn dann gibt es immer kombinierende

Zustände mit beliebig benachbarter Energie. Ist z. B. $\xi = \pi$; η und ζ beliebig, so hat der Zustand $-\pi, \eta, \zeta$ dieselbe Energie. Das Matricelement existiert und ist gleich $u(1, 0, 0)$. In diesem Falle haben wir die Störungsrechnung etwas zu modifizieren. Der Kürze halber seien die Eigenfunktionen φ_1, φ_2 , die Eigenwerte E_1, E_2 . Wir werden dann die Termdifferenz $E_2 - E_1$ ebenfalls als klein von der ersten Ordnung ansehen.

Wir suchen dann eine Funktion der Form

$$\psi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + v, \quad v \ll \varphi,$$

die bis auf Glieder höherer Ordnung die Schrödingergleichung

$$\Delta \psi + \mu(E - U) \psi = 0, \quad \mu = \frac{8\pi^2 m}{h^2}$$

mit dem Eigenwert $E = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) + \varepsilon$ befriedigt. Nach Einsetzen und Fortlassen aller Glieder höherer Ordnung bleibt

$$\begin{aligned} \Delta v + \mu \frac{E_1 + E_2}{2} v &= \alpha_1 \left[E_1 \varphi_1 - \frac{1}{2} (E_1 + E_2) \varphi_1 - \varepsilon \varphi_1 \right] \\ &+ \alpha_2 \left[E_2 \varphi_2 - \frac{1}{2} (E_1 + E_2) \varphi_2 - \varepsilon \varphi_2 \right] + U (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2). \end{aligned}$$

Dabei ist benutzt, daß φ_1 und φ_2 die Gleichung ohne U mit den Energiewerten E_1 und E_2 erfüllen. Die inhomogene Gleichung hat nur dann eine Lösung, wenn die rechte Seite auf den Lösungen der homogenen orthogonal ist. In dieser Näherung haben wir φ_1, φ_2 als Lösungen der homogenen Gleichung aufzufassen, und es folgt:

$$\alpha_1 \left[\frac{1}{2} (E_1 - E_2) - \varepsilon \right] + \alpha_2 U_{12} = 0,$$

$$\alpha_1 U_{21} + \alpha_2 \left[\frac{1}{2} (E_2 - E_1) - \varepsilon \right] = 0.$$

Das Verschwinden der Determinante erfordert für ε die Werte

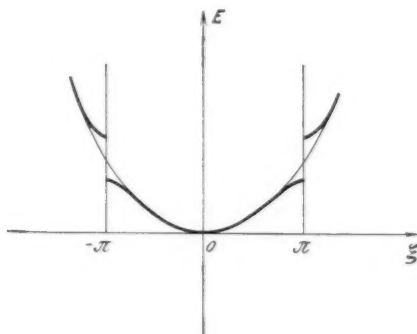
$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{1}{4} (E_2 - E_1)^2 + |U_{12}|^2}$$

und für die Koeffizienten

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \alpha_2 \frac{E_2 - E_1}{|U_{12}|} \cdot \left[1 \mp \sqrt{1 + \left| \frac{U_{12}}{E_2 - E_1} \right|^2} \right].$$

Wir sehen also, daß die Energie als Funktion von ξ, η, ζ etwa den Verlauf von Fig. 1 hat. Es gibt insbesondere also in der

Nähe der Fläche $\xi = n\pi$ ein Gebiet, in dem $\frac{\partial E}{\partial \xi} = 0$ ist.¹⁾ Außerdem werden wir später das Verhalten der Eigenfunktionen in der Nähe der Würzelfläche brauchen. Dort wird $\alpha_1 = \pm \alpha_2$ und die Eigenfunktionen nullter Näherung sind



Energiewerte erster Näherung

Fig. 1

stehende Wellen. Sie ändern sich also insbesondere nicht, wenn man x mit $-x$ vertauscht, und dieses Resultat gilt in beliebiger Näherung.

§ 2. Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen

Ist infolge der Gitterschwingungen das n -te Atom um u_n aus seiner Ruhelage entfernt, so kommt zu (3a) der Zusatz:

$$(4) \quad W = \sum_n [F(\mathbf{r} - \mathbf{a}n - u_n) - F(\mathbf{r} - \mathbf{a}n)].$$

Wir brauchen nun das Matrixelement für den Übergang, bei dem zu Anfang der Zustand des Elektrons durch ξ , der

1) Dieses Ergebnis ist deswegen von Bedeutung, weil es zeigt, daß die für den anomalen Halleffekt notwendige typische Form der Energiekurve (vgl. R. Peierls, Ztschr. f. Phys. 53, S. 255, 1929) auch dann vorhanden sein kann, wenn die Größenordnung der kinetischen Energie noch dieselbe ist, wie bei freien Elektronen. Bisher schien es immer notwendig, daß Substanzen mit anomalem Halleffekt einen besonders großen Paramagnetismus haben, im Widerspruch mit der Erfahrung.

des Gitters durch die Eigenfunktion $\chi(u)$, nachher bzw. durch ξ' , χ' gegeben werden.

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int W \psi_{\xi} \bar{\psi}_{\xi'} \chi \bar{\chi}' d\tau d\tau_n \\ &= \sum_n \int [F(\mathbf{r} - a\mathbf{n} - \mathbf{u}_n) - F(\mathbf{r} - a\mathbf{n})] \psi_{\xi} \bar{\psi}_{\xi'} \chi \bar{\chi}' d\tau \\ &= \sum_n \int F(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) [\psi_{\xi}(\mathbf{r} + \mathbf{u}_n) \bar{\psi}_{\xi'}(\mathbf{r} + \mathbf{u}_n) \\ &\quad - \psi_{\xi} \bar{\psi}_{\xi'}] \chi \bar{\chi}' d\tau \\ &= \sum_n \int F(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) (\mathbf{u}_n, \text{grad}(\psi_{\xi} \bar{\psi}_{\xi'})(\mathbf{r} - a\mathbf{n})) \chi \bar{\chi}' d\tau \\ &= \sum_n \int F(\mathbf{r}) (\mathbf{u}_n, \text{grad}(\psi_{\xi} \bar{\psi}_{\xi'})) \cdot e^{-i(\xi - \xi', \mathbf{n})} \chi \bar{\chi}' d\tau. \end{aligned} \right.$$

[Formel (5) wurde schon von Bloch angegeben, doch benutzte er dabei eine Entwicklung von F in eine Potenzreihe, was wegen der Singularität am Nullpunkt bedenklich sein könnte.] Die Gitterschwingungen und die zugehörigen Matrixelemente sind hinreichend bekannt. Es erscheint bequem, dieselbe Bezeichnungsweise zu benutzen, die in W gebraucht wurde, insbesondere die Schwingungen nicht nach Sinuswellen, sondern nach Exponentialfunktionen zu zerlegen, und die Frequenz, ebenso wie die Quantenzahlen auch negative Werte durchlaufen zu lassen. Wir übernehmen die Bezeichnungen ungeändert aus W , nur wollen wir stets ν für $\omega/2\pi$ schreiben. Es wird dann [W , GL. (6'), (11'), (39) usw.]¹⁾

$$\mathbf{u}_n = \sum \mathfrak{A}_{fghj} \cdot \alpha_{fghj} e^{i(fn_1 + gn_2 + hn_3)}.$$

Die zu χ gehörigen Quantenzahlen seien N_{fghj} , zu χ' entsprechend N'_{fghj} . Dann ist das Matrixelement von \mathbf{u}_n bekanntlich 0, außer wenn alle $N = N'$, bis auf eine Indexkombination $fghj$, für die $N'_{fghj} = N_{fghj} - 1$. Das zugehörige Matrixelement von W ist

$$\sum \int F(\mathbf{r}) (\text{grad}(\psi_{\xi} \bar{\psi}_{\xi'}), \mathfrak{A}_{fghj}) e^{i(f\xi + \xi - \xi', \mathbf{n})} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi^2 M \nu_f}} N_{fghj}.$$

1) \mathfrak{A}_{fghj} ist der Vektor mit den Komponenten α_{fghj} , β_{fghj} , γ_{fghj} .

Die Summe über $n_1 n_2 n_3$ verschwindet immer, wenn nicht

$$(6) \quad \begin{cases} f + \xi - \xi' = k_1 \cdot 2\pi, \\ g + \eta - \eta' = k_2 \cdot 2\pi, \\ h + \zeta - \zeta' = k_3 \cdot 2\pi, \end{cases} \quad k_i = 0, \pm 1.$$

Es ist auch hier von entscheidender Bedeutung, daß diese Interferenzbedingungen nur mod 2π gelten. Wäre das nicht der Fall, so würde unter dem Einfluß der Störung (4) die Größe

$$(7) \quad J_x = \sum f N_{fghj} + \sum \xi n_{\xi\eta\zeta} = J_{xG} + J_{xel}$$

und zwei andere für die y - und z -Richtung zeitlich konstant bleiben, wenn man unter $n_{\xi\eta\zeta}$ die Zahl der Elektronen im Zustand $\xi\eta\zeta$ versteht. Wir wollen J als Gesamtwellenzahl bezeichnen.

Aus der Konstanz von J würde dann folgen, daß die Leitfähigkeit unendlich groß wird, denn wenn man ein äußeres elektrisches Feld F in der x -Richtung anlegt, so nimmt J_x ständig zu¹⁾:

$$(8) \quad \dot{J}_x = + \frac{2\pi e F a}{h} \cdot N.$$

(N ist die Zahl der vorhandenen Elektronen.) Diese Zunahme von J kann durch die Zusammenstöße mit dem Gitter nicht kompensiert werden, so lange man nicht diejenigen Lösungen von (6) zuläßt, bei denen die rechte Seite nicht Null ist. Es gibt also keine stationäre Verteilung, solange nicht durch andere Prozesse dafür gesorgt ist, daß diese Zunahme von J kompensiert wird. Als solche Prozesse sind in erster Linie die in W diskutierten Wechselwirkungen der Gitterschwingungen untereinander vorhanden. Wir wollen durch eine grob schematisierte Abschätzung überlegen, was diese Prozesse ausmachen können. Dazu bemerken wir folgendes: Die Abnahme von J infolge der Gitterwechselwirkung ist offenbar bedingt durch die Abweichung des Gitters vom Gleichgewichtszustand. Es ist also eine sinn-gemäße Näherung, wenn wir setzen

$$\dot{J} = -\beta J_G.$$

Der zu einem gegebenen J_{el} gehörige elektrische Strom pro Volumeneinheit ist ungefähr

$$I = \frac{e h}{2\pi a m V} J_{el},$$

1) F. Bloch, a. a. O. Gl. (50).

da die Geschwindigkeit eines einzelnen Elektrons ungefähr

$$\frac{h}{2\pi a m} \xi \text{ ist. Wegen } I = \sigma F \text{ wird also}$$

$$(9) \quad J_{el} = \frac{2\pi a m V}{e h} \sigma F.$$

Infolge der Zusammenstöße der Elektronen mit dem Gitter wird durch das Vorhandensein eines von Null verschiedenen J_{el} auch J_G erzeugt werden. Erfolgt jedoch die Vernichtung durch die Gitteranharmonizitäten unendlich rasch, so muß das Verhältnis J_G/J_{el} sehr klein gegenüber dem Gleichgewichtsverhältnis sein, d. h. gegenüber demjenigen, das sich einstellen würde, wenn keine Anharmonizitäten da wären. Wenn wir also dieses Verhältnis γ nennen, so gibt $\gamma \beta J_{el}$ die maximal mögliche Abnahme von J bei gegebenem J_{el} . Vergleichen wir diese Abnahme mit der durch (8) geforderten, so erhalten wir ein Maß dafür, ob die Anharmonizitäten das Gleichgewicht praktisch unendlich rasch wieder herstellen oder nicht. Zur Berechnung von γ bemerken wir, daß wegen der Konstanz von J derjenige Zustand stationär sein wird, bei dem die mittlere Zahl der Elektronen im Zustand $\xi \eta \zeta$ bzw. die mittlere Anregungsstärke der Schwingung f, g, h, j durch

$$n_{\xi \eta \zeta} = n^0(E_\xi - c \xi); \quad N_{fghj} = N^0(h \nu - c f)$$

gegeben werden (Maximum der Entropie bei festem Wert von E und J). Dabei sollen $n^0(E)$ und $N^0(h \nu)$ die thermischen Gleichgewichtsverteilungen sein, und c eine beliebige Konstante, die wir als klein ansehen können. Wir berechnen für diese Verteilung den Mittelwert von J_{el} zu

$$J_{el} = \sum \xi \cdot n_\xi = -c \left(\frac{G}{2\pi} \right)^3 \cdot \frac{4\pi}{3\omega} \cdot \int \varrho^4 d\varrho \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho^2} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{\omega \varrho^2 - E_0}{kT}}} \right)$$

und den Mittelwert von J_G zu

$$J_G = \sum f \cdot n_f = -c \left(\frac{G}{2\pi} \right)^3 \cdot \frac{4\pi}{3kT\nu_0^3} \cdot \int_0^{\nu_0} \frac{\nu^4 d\nu}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right) \left(e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}$$

und erhalten so

$$(10) \quad \gamma = \left(\frac{T}{\Theta} \right)^5 \cdot \frac{2\omega}{6\pi^2 \pi k T} \cdot \int_0^{\Theta/T} \frac{x^4 dx}{(e^x - 1)(e^{-x} - 1)}.$$

Darin ist Θ die charakteristische Temperatur des Gitters, z die Zahl der Elektronen pro Atom. Bei Zimmertemperatur ist also, wenn Θ von der Ordnung 300° angenommen wird, $\gamma \sim 1$.

Schließlich bleibt noch die Konstante $1/\beta$ abzuschätzen. Dazu bemerken wir, daß diese „Abklingungszeit“ nur durch Gittereigenschaften bedingt ist, also die gleiche Größe haben wird wie bei nichtleitenden Kristallen. Dort bedeutet sie aber, mit der Geschwindigkeit v der elastischen Wellen multipliziert, die freie Weglänge l dieser Wellen, die ihrerseits mit der Wärmeleitfähigkeit λ durch die Relation¹⁾

$$\lambda = l \cdot v \cdot c$$

zusammenhängt. c ist die spezifische Wärme pro Volumeneinheit. Benutzen wir etwa die empirischen Werte für Kochsalz bei Zimmertemperatur, so ergibt sich hieraus $\frac{1}{\beta} \sim 10^{-12}$ sec.

Das Verhältnis $J:J_{el}$ wird wegen $\gamma \sim 1$ auch von dieser Größe. Andererseits errechnet sich dieses Verhältnis aus (8) und (9) ebenfalls zu 10^{-12} bis 10^{-13} . Es kann also keine Rede davon sein, daß sich das Gittergleichgewicht durch die Anharmonizitäten „unendlich rasch“ einstellt.

Diese Verhältnisse verschärfen sich, wenn man zu tieferen Temperaturen übergeht. Führt man die eben gemachte Abschätzung für $T = 20^\circ$ durch, so findet man $\gamma \cdot \beta \sim 10^5$, d. h. 10^{-7} mal so groß wie bei Zimmertemperatur, während die Leitfähigkeit sich nur etwa auf das 100 fache vergrößert hat. Bei tiefen Temperaturen sind also die Anharmonizitäten gar nicht mehr in der Lage, die durch das Feld verursachte Zunahme der Gesamtwellenzahl zu kompensieren. Wären nur die Anharmonizitäten für diesen Zweck verfügbar, so müßte die Leitfähigkeit sehr viel größer sein.

Nun ändert sich aber diese Wellenzahl auch infolge der Zusammenstöße Gitter-Elektronen, wenn man die bisher nicht ausgenutzten Lösungen von (6) beachtet. Diese Beiträge sind also bei tiefen Temperaturen allein maßgebend, bei höheren Temperaturen sind sie von derselben Größenordnung wie die Wirkung der Anharmonizitäten. Wir wollen in allen Fällen so rechnen, als ob sie allein vorhanden wären und die An-

1) P. Debye, Vorträge über die kinetische Theorie usw. Teubner 1914.

harmonizitäten ganz fortlassen. Das Resultat ist sicher größenordnungsmäßig richtig, und für tiefe Temperaturen korrekt.

Es fehlt noch eine Annahme über das Integral

$$\int F(\mathbf{r}) (\text{grad } \psi_{\xi} \bar{\psi}_{\xi'}, \mathfrak{A}_{fghj}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Wir werden es vor allem für den Fall brauchen, daß $-\pi < \xi, \xi' < \pi$. Ist dann $\xi \ll \pi$, so sind die Blochschen Annahmen über die Eigenfunktionen zulässig, und wir können von ihm übernehmen, daß dieses Integral für longitudinale Wellen

$$\frac{iC}{2\mu a} \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}$$

wird, wo C eine Konstante von der Größenordnung: Quadrat des reziproken Atomradius ist, und für transversale Wellen verschwindet. Ferner interessiert uns das Verhalten der Integrale für kleine fgh . Es folgt aus dem obigen, falls in (6) überall 0 steht. Sonst gibt es Übergänge vom Typus $\pi, \eta, \zeta \rightarrow -\pi, \eta, \zeta$. Dabei sind, wie wir oben betonten, die beiden Funktionen ψ und ψ' invariant gegen eine Vertauschung von x mit $-x$, und da von $F(\mathbf{r})$ dasselbe gilt, verschwindet das Integral für $f = 0$. Das gilt allerdings nur, wenn sich $\xi \eta \zeta$ und $\xi' \eta' \zeta'$ der fraglichen Würfel Fläche beide von oben oder beide von unten nähern. Im anderen Fall haben die Zustände $\xi \eta \zeta$ und $\xi' \eta' \zeta'$ jedoch eine endliche Energiedifferenz, so daß dieser Übergang mit $f = 0$ die Interferenzbedingungen nicht befriedigt. Man überlegt ferner leicht, daß sich das Integral für kleine f wie $\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}$ verhalten muß. Wir werden später nur diese Eigenschaft gebrauchen und wollen das Integral daher in beiden Fällen gleich

$$(11) \quad \frac{iC}{2\mu a} \sqrt{f^2 + g^2 + h^2}$$

setzen.¹⁾

1) Herr Prof. Pauli hat mich freundlichst darauf aufmerksam gemacht, daß (4) keineswegs der allgemeine Ansatz für die Störungsenergie ist, da die Gitterionen bei der Verschiebung im allgemeinen deformiert werden. Solange man sich aber auf die in den Elongationen linearen Glieder beschränkt, — was für tiefe Temperaturen streng zulässig und für höhere eine sinngemäße Näherung ist, — ändert die Berücksichtigung dieser Tatsache nichts am Resultat. Denn die Größenordnung des Wechselwirkungsintegrals bleibt offenbar dieselbe und das Verschwinden

Kapitel II. Elektrische Leitfähigkeit

§ 3. Näherungsverfahren

Die Änderung der Zahl der Elektronen im Zustand $\xi \eta \zeta$ infolge eines Feldes der Stärke F in der x -Richtung ist ¹⁾:

$$\frac{2\pi a e F}{h} \cdot \frac{\partial n}{\partial \xi}.$$

Die Änderung dieser Zahl infolge der Zusammenstöße mit dem Kristallgitter ist

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\xi' f} W_{\xi \xi' f} \cdot [n_{\xi'} (1 - n_{\xi}) (N_f + 1) - n_{\xi} (1 - n_{\xi'}) N_f] \\ \text{wo} \\ W_{\xi \xi' f} = \frac{h C^2 (f^2 + g^2 + h^2)}{16 \pi M a^3 \nu \mu^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1 - \cos \frac{2\pi t}{h} (E_{\xi} - E_{\xi'} + h \nu)}{(E_{\xi} - E_{\xi'} + h \nu)^2} \end{array} \right.$$

und die Änderung der Anregungsstärke des $f g h j$ -Oszillators infolge derselben Prozesse ist:

$$\sum_{\xi \xi'} W_{\xi \xi' f} [n_{\xi'} (1 - n_{\xi}) (N_f + 1) - n_{\xi} (1 - n_{\xi'}) N_f].$$

In beiden Fällen ist nur über diejenigen Werte zu summieren, für die (vektoriell)

$$(12a) \quad \xi + f \equiv \xi' \pmod{2\pi}.$$

Die Bedingung für die Stationarität lautet also:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2\pi a e F}{h} \frac{\partial n}{\partial \xi} = \sum_{\xi' f} W_{\xi \xi' f} \cdot [n_{\xi'} (1 - n_{\xi}) (N_f + 1) - n_{\xi} (1 - n_{\xi'}) N_f] \\ 0 = \sum_{\xi' \xi} W_{\xi \xi' f} [n_{\xi'} (1 - n_{\xi}) (N_f + 1) - n_{\xi} (1 - n_{\xi'}) N_f]. \end{array} \right.$$

des Integrals für $f = g = h = 0$ wird dadurch gewährleistet, daß die Deformation der Ionen nur von

$$u_{n_1, n_2, n_3}^x - u_{n_1-1, n_2, n_3}^x \quad \text{und} \quad u_{n_1, n_2, n_3}^y - u_{n_1, n_2-1, n_3}^y$$

usw. abhängt. Diese Größen verschwinden aber sämtlich für $f = g = h = 0$, wegen W , Gleichung (6').

1) F. Bloch, a. a. O. Gl. (50).

Wir setzen nun:

$$(14) \quad \begin{cases} n(\xi, \eta, \zeta) = n_{\xi}^0 + n_{\xi}^1 \\ N_{fg h j} = N_{fg h j}^0 + N_{fg h j}^1 \end{cases}$$

mit

$$(15) \quad n^0 = \frac{1}{e^{\frac{E - E_0}{kT}} + 1}, \quad N^0 = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Dabei sollen n^1 und N^1 klein von der Ordnung F sein. Setzen wir (14) in (15) ein und vernachlässigen die Glieder zweiter Ordnung, berücksichtigen ferner, daß man wegen des Resonanzfaktors in (12) E' überall durch $E + h\nu$ ersetzen darf, so daß (15) die Gleichungen für $F = 0$ befriedigt, so erhalten wir:

$$(16) \quad \begin{cases} \sum_{\xi' f} W_{\xi \xi' f} \frac{1}{(e^{\xi} + 1)(e^{-\xi'} + 1)(e^x - 1)} \{ n_{\xi}^1 (e^{\xi'} + 1)(e^{-\xi'} + 1) \\ - n_{\xi}^1 (e^{\xi} + 1)(e^{-\xi} + 1) - N_f^1 (e^x - 1)(e^{-x} - 1) \} \\ = - \frac{2\pi a e F}{h} \frac{\partial n^0}{\partial \xi} \\ \sum_{\xi \xi'} W_{\xi \xi' f} \frac{1}{(e^{\xi} + 1)(e^{-\xi'} + 1)(e^x - 1)} \{ n_{\xi}^1 (e^{\xi'} + 1)(e^{-\xi'} + 1) \\ - n_{\xi}^1 (e^{\xi} + 1)(e^{-\xi} + 1) - N_f^1 (e^x - 1)(e^{-x} - 1) \} = 0. \end{cases}$$

In (16) wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$(17) \quad \frac{E(\xi) - E_0}{kT} = \xi \quad \frac{E(\xi') - E_0}{kT} = \xi' \quad \frac{h\nu(f)}{kT} = x.$$

Die zu (16) gehörigen homogenen Gleichungen haben zwei nicht triviale Lösungen, nämlich

$$n^1(\xi) = \frac{E(\xi)}{(e^{\xi} + 1)(e^{-\xi} + 1)} \quad N_f^1 = \frac{h\nu}{(e^x - 1)(e^{-x} - 1)}$$

und

$$n^1(\xi) = \frac{1}{(e^{\xi} + 1)(e^{-\xi} + 1)} \quad N_f^1 = 0$$

Die Existenz dieser beiden Lösungen bedeutet die Gültigkeit des Energiesatzes sowie die Erhaltung der Teilchenzahl. Sie hat jedoch für die Lösbarkeit von (16) nichts zu bedeuten, denn man sieht sofort, daß die zugehörigen Lösungen der transponierten Gleichung schon von selbst auf der rechten Seite von (16) orthogonal sind. Würden wir dagegen die „Um-

klappprozesse“ d. h. den Zusatz „mod 2π “ in (12a) fortlassen, so hätten wir noch eine weitere Lösung der homogenen Gleichungen, nämlich:

$$(18) \quad n^1(\xi) = \alpha \cdot \frac{\xi}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}, \quad N_f^1 = \alpha \frac{f}{(e^x - 1)(e^{-x} - 1)},$$

die dem Erhaltungssatz für die Gesamtwellenzahl entspricht. Die strenge Lösung der Gleichung (16) mit Berücksichtigung dieser Prozesse ist nicht ausführbar. Wir beachten aber, daß solche Umklappprozesse nur dann stattfinden, wenn das betreffende Elektron einen Zustand in der Nähe von $\xi = \pm \pi$ hat. Sie machen also nur einen kleinen Teil sämtlicher Zusammenstoßprozesse aus, und es ist daher vernünftig, sie als eine kleine Störung zu behandeln. Wir setzen demnach an:

$$n = n^0 + n^1 + n^2 \quad N = N^0 + N^1 + N^2,$$

wo n^1, N^1 die Werte aus (18) sind, und verlangen dann, daß

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\xi' f} W_{\xi \xi' f}^0 \frac{1}{(e^x + 1)(e^{-x'} + 1)(e^x - 1)} \{n_{\xi'}^2 (e^{x'} + 1)(e^{-x'} + 1) \dots\} \\ &= - \frac{2\pi a e F}{h} \frac{\partial n^0}{\partial \xi} - \alpha \sum_{\xi' f} W_{\xi \xi' f}^1 \frac{(\xi' - \xi - f)}{(e^x + 1)(e^{-x'} + 1)(e^x - 1)} \\ &- \sum_{\xi \xi' f} W_{\xi \xi' f}^0 \frac{1}{(e^x + 1)(e^{-x'} + 1)(e^x - 1)} \{n_{\xi'}^2 (e^{x'} + 1)(e^{-x'} + 1) + \dots\} \\ &= + \sum_{\xi \xi' f} W_{\xi \xi' f}^1 \frac{\xi' - \xi - f}{(e^x + 1)(e^{-x'} + 1)(e^x - 1)}, \end{aligned} \right.$$

wo sich W^0 nur auf diejenigen Indizes bezieht, für die

$$\xi' = \xi + f$$

ist, und W^1 auf die übrigen. Damit eine Lösung von (19) existiert, muß die rechte Seite von (19) auf den Lösungen der transponierten homogenen Gleichung orthogonal sein. Die einzige Lösung, für die das nicht automatisch der Fall ist, ist:

$$(20) \quad n_{\xi} = \xi \quad N_f = \frac{f}{2}.$$

(Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt davon her, daß wir dieselbe Gitterschwingung als f, j und das andere Mal als $-f, -j$ zweimal zählen.) Die Größenordnung des ersten Gliedes wird man

richtig erhalten, wenn man annimmt, daß $E = \omega(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$, dann folgt

$$(21) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2\pi a e F}{h} \left(\frac{G}{2\pi} \right)^3 \iiint \frac{\partial n_0}{\partial \xi} \cdot \xi d\xi d\eta d\zeta \\ & = + \left(\frac{G}{2\pi} \right)^3 \frac{2\pi a e F}{h} \iiint n_0 d\xi d\eta d\zeta = \kappa G^3 \cdot \frac{2\pi a e F}{h} \end{aligned} \right.$$

Wir haben nun das zweite Glied auf der rechten Seite von (19) abzuschätzen. Für den Beitrag der ersten Gleichung (19) zu dem Orthogonalitätsintegral erhalten wir:

$$(22) \quad \alpha \sum_{\xi \xi'} W_{\xi \xi' f}^1 \frac{(\xi' - \xi - f) \xi}{(e^\xi + 1)(e^{-\xi'} + 1)(e^x - 1)}$$

als Beitrag der zweiten Gleichung:

$$(23) \quad \frac{1}{2} \alpha \cdot \sum_{\xi \xi' f} W_{\xi \xi' f}^1 \frac{(\xi' - \xi - f) f}{(e^\xi + 1)(e^{-\xi'} + 1)(e^x - 1)}.$$

Zusammen also, wenn wir berücksichtigen, daß $W_{\xi \xi' f}$ sein Vorzeichen verändert, wenn man ξ und ξ' vertauscht:

$$(24) \quad -\frac{1}{2} \alpha \cdot \sum_{\xi \xi'} W_{\xi \xi' f}^1 \frac{(\xi' - \xi - f)^2}{(e^\xi + 1)(e^{-\xi'} + 1)(e^x - 1)}.$$

Am stärksten werden die Prozesse vertreten sein, für die

$$(24a) \quad \xi' - \xi - f = \pm 2\pi$$

ist. Benutzen wir dies, sowie (12), so kommt

$$(25) \left\{ \begin{aligned} & -4\pi^2 \frac{A \cdot \alpha}{2} \cdot \sum \frac{f^2 + g^2 + h^2}{v(fgh)} \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{1 - \cos \frac{2\pi t}{h}(E - E' + h\nu)}{(E - E' + h\nu)^2} \cdot \frac{1}{(e^\xi + 1)(e^{-\xi'} + 1)(e^x - 1)}, \end{aligned} \right.$$

worin zur Abkürzung

$$(26) \quad A = \frac{h C^2}{16\pi^2 M a^2 \mu^2}$$

gesetzt wurde.

Der Resonanzfaktor ist nur von Null verschieden, wenn der Vektor ξ' auf der durch

$$E(\xi') - E(\xi) = h\nu(\xi' - \xi \pm 2\pi)$$

definierten Fläche liegt. Statt dessen können wir in allen langsam veränderlichen Faktoren über die Fläche $E(\xi') = E(\xi)$ integrieren und müssen nur in den rasch veränderlichen Exponentialfaktoren $\xi + x$ statt ξ' einsetzen ($h\nu$ ist immer klein

gegen ω). Die Fläche $E = \text{const}$ ist wegen des in Fig. 1 dargestellten Dispersionsgesetzes sehr verwickelt. Es kommt uns aber nur auf Größenordnungen und Temperaturabhängigkeit an und beide werden nicht gefälscht, wenn wir statt dessen die Kugelfläche $(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ annehmen. Ferner beachten wir, daß das Integral nur dann einen Beitrag liefert, wenn sowohl ε wie ε' höchstens von der Ordnung 1 sind. Wir führen dementsprechend die folgenden Integrationsvariablen ein:

$$(27) \quad \begin{cases} \xi = \varrho \cos \vartheta & \eta = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi & \zeta = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \xi' = \varrho' \cos \vartheta' & \eta' = \varrho' \sin \vartheta' \sin \varphi' & \zeta' = \varrho' \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ \varrho^2 = \varrho_0^2 + \frac{kT}{\omega} \cdot \varepsilon & \varrho'^2 = \varrho^2 + \frac{h}{2\pi t} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot y \end{cases}$$

und vernachlässigen alle höheren Potenzen von kT/ω . Dabei muß aber wegen (24a) nur über die Werte von $\vartheta' \varphi'$ integriert werden, wo

$$|\xi' - \xi| \geq \pi \quad |\eta' - \eta| \leq \pi \quad |\zeta' - \zeta| \leq \pi.$$

Es ist zunächst fraglich, ob es unter unseren Voraussetzungen über ε und ε' solche Werte überhaupt gibt. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß¹⁾

$$(28) \quad \varrho_0 \geq \pi.$$

Die genaue Form dieser Abschätzung ist durch das Dispersionsgesetz bedingt, allgemein heißt sie: $E_0 \geq E(\pi, 0, 0)$. Da sich die Energiekurve in der Nähe von $\xi = \pi$ nach Fig. 1 abflacht, so wird die wirkliche Fläche $E = \text{const}$ von der Würfel­fläche „angezogen“ und die strenge Bedingung ist *schwächer* als (28). Ob sie erfüllt ist, hängt von der Zahl der Elektronen pro Atom (genauer von der Zahl z der Elektronen pro „Platz“) ab, über die man theoretisch nicht viel sagen kann. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so heißt das, daß die Zusammenstöße der Elektronen mit dem Gitter überhaupt keine „Umklappprozesse“ hervorrufen, d. h. die Gesamtwellenzahl ungeändert lassen. Die einzigen Prozesse, die dann noch dafür verantwortlich sein können, daß die Leitfähigkeit nicht auf den Wert steigt, der durch die Anharmonizitäten allein begrenzt ist, sind

1) ϱ_0 ist der Radius der Kugel, innerhalb deren bei $T=0$ alle Elektronen sitzen, ist also durch die Zahl der Elektronen bestimmt.

dann noch die Zusammenstöße der Elektronen untereinander. Man kann aber zeigen, daß sie für tiefe Temperaturen Proportionalität der Leitfähigkeit mit T^{-3} liefern würden, ein Gesetz, das man praktisch nie gefunden hat. Man wird daher annehmen müssen, daß die zu (28) entsprechende Bedingung in allen physikalisch vorkommenden Fällen realisiert ist.

Es handelt sich dann um die Ausführung des Integrals

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & -4\pi^2 \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{G}{2\pi}\right)^6 \cdot \frac{\pi^2 k T}{4\omega^2 h} \varrho_0^2 \int \frac{f^2 + g^2 + h^2}{v} \\ & \cdot \frac{d\varepsilon \cdot \sin \vartheta \sin \vartheta' d\vartheta d\vartheta' d\varphi d\varphi'}{(e^\varepsilon + 1)(e^{-\varepsilon + x} + 1)(e^x - 1)} \end{aligned} \right.$$

mit Berücksichtigung von (24a). Die strenge Rechnung dürfte praktisch unmöglich sein, hängt außerdem auch noch stark von dem zugrunde gelegten Dispersionsgesetz ab. Wir können aber in zwei Grenzfällen die Größenordnung und die Temperaturabhängigkeit von (29) angeben.

§ 4. Grenzfall hoher Temperaturen

Wir nehmen zunächst an, es sei $T \gg \Theta$, wobei Θ die charakteristische Temperatur des Gitters ist. Dann ist immer $x \ll 1$, und wir können $e^x - 1$ durch x ersetzen. Ferner können wir noch schreiben:

$$(30) \quad v = v_0 \cdot \Phi(f, g, h),$$

worin $v_0 = \frac{k\Theta}{h}$ die Grenzfrequenz des elastischen Spektrums und Φ eine Funktion von der Größenordnung 1 ist. Dann wird aus (29):

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & -4\pi^2 \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{G}{2\pi}\right)^6 \cdot \frac{\pi^2 \cdot (kT)^2}{4\omega^2 h^2 v_0^2} \cdot \varrho_0^2 \int \frac{f^2 + g^2 + h^2}{\Phi(f, g, h)^2} \\ & \cdot \frac{d\varepsilon \sin \vartheta \sin \vartheta' d\vartheta d\vartheta' d\varphi d\varphi'}{(e^\varepsilon + 1)(e^{-\varepsilon} + 1)} \end{aligned} \right.$$

Das Integral enthält nur noch Faktoren der Größenordnung 1, und wir werden eine vernünftige Abschätzung bekommen, wenn wir es gleich 1 setzen. Beachten wir nun, daß (31) gleich (21) sein muß, wenn die verlangte Orthogonalität bestehen soll, so wird

$$(32) \quad \alpha \approx \left(\frac{2\pi}{G}\right)^3 \cdot 16 \frac{ae F \omega^2 x}{h A} \cdot \left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 \varrho_0^{-2}.$$

Schließlich müssen wir noch die zu (18) gehörige elektrische Stromdichte berechnen. Wir erhalten

$$I = \left(\frac{G}{2\pi}\right)^3 \cdot \int \frac{\xi^2}{(e^\xi + 1)(e^{-\xi} + 1)} \cdot d\xi d\eta d\zeta \cdot \alpha \cdot \frac{e h}{2\pi a m V} \\ = \left(\frac{G}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \varrho_0^3 \frac{k T}{\omega} \cdot \alpha \cdot \frac{e h}{2\pi a m V}$$

und damit für die Leitfähigkeit:

$$(33) \quad \sigma \approx 10^3 \cdot \frac{\omega e^2 a^3 \mu^2}{C^2 h m} (k \Theta) \frac{\Theta}{T} \cdot \frac{M}{V} \cdot x^{1/2}.$$

Wie zu erwarten war, ergibt sich die Leitfähigkeit für hohe Temperaturen proportional $1/T$. Für die Größenordnung finden wir, wenn etwa $\Theta \sim 300^\circ$, $C \sim 10^{+16}$ sind, $5 \cdot 10^{19} \cdot \frac{\Theta}{T}$ elektrostatische Einheiten, in roher Übereinstimmung mit dem empirischen Wert.

§ 5. Grensfall tiefer Temperaturen

Ist $T \ll \Theta$, so liefert das Integral nur dort einen Beitrag, wo $x \ll 1$. Da sich aber ν für kleine fgh wie $\nu_0 \sqrt{f^2 + g^2 + h^2}$ verhält, haben wir $x \sim \frac{\Theta}{T} \cdot \sqrt{f^2 + g^2 + h^2}$ zu setzen. Falls $x=0$, muß $\xi = \xi' \pm 2\pi$, $\eta = \eta'$, $\zeta = \zeta'$ sein, d. h. $\xi = \pm \pi$. Mit anderen Worten: $\xi \eta \zeta$ liegt nahe dem Schnittkreis der Kugel $\varrho = \varrho_0$ mit der Würfelfläche $\xi = \pi$. Ersetzen wir also die Integrationsvariablen durch

$$(34) \quad \begin{cases} \vartheta = \vartheta_0 + \left(\frac{T}{\Theta}\right) x \cdot \vartheta_1 & \left(\cos \vartheta_0 = \frac{\pi}{\varrho_0}\right) \\ \vartheta' = \vartheta_0 + x \vartheta_1' \left(\frac{T}{\Theta}\right) & \varphi' = \varphi + x \left(\frac{T}{\Theta}\right) \varphi_1, \end{cases}$$

so werden ϑ_1 , φ_1 , ϑ_1' alle von der Größenordnung 1 werden. Wir können hier also setzen:

$$(35) \quad (21) = -\pi^4 \alpha A \cdot \left(\frac{G}{2\pi}\right)^3 \frac{1}{\omega^3} \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \cdot K,$$

wo K wieder ein Integral über dimensionslose Faktoren von der Größenordnung 1 ist und durch 1 ersetzt werden soll.

Die Leitfähigkeit wird demnach für tiefe Temperaturen proportional mit T^{-4} , in Übereinstimmung mit dem von Grün-

eisen¹⁾ gefundenen empirischen Gesetz. Nach der Bloch-schen Theorie würde man ein T^{-5} -Gesetz erhalten.²⁾ Die experimentellen Ergebnisse reichen vorläufig noch nicht aus, um zwischen diesen beiden Gesetzen entscheiden zu können.

Für dieses Resultat ist unser Ergebnis von § 1 wesentlich, wonach die Matricelemente auch für Umklappprozesse in der Nähe von $f = g = h = 0$ verschwinden, da man sonst Proportionalität mit T^{-2} bekommen würde.

Die Größenordnung des Koeffizienten von T^{-4} wird $5 \cdot 10^{19} \cdot \Theta^4$ elektrostatische Einheiten in nicht zu schlechter Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Kapitel III: Wärmeleitung

§ 6. Aufstellung der Integralgleichung

Für die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit spielen die Umklappprozesse erst in höheren Näherungen eine Rolle. Das liegt an folgendem: Die elektrische Leitfähigkeit wird ja, falls ein Erhaltungssatz für die Gesamtwellenzahl J gilt, deswegen unendlich, weil es dann stationäre Zustände ohne äußeres Feld gibt, zu denen ein von Null verschiedener Strom gehört. Für alle Experimente jedoch, bei denen man die Wärmeleitfähigkeit messen kann, sind die experimentellen Bedingungen so gewählt, daß kein elektrischer Strom fließen kann, es bildet sich sogleich ein Gegenfeld aus, das das Fließen eines Stromes verhindert. Stationär sind also nur solche Zustände, die keinen elektrischen Strom führen. Bedenkt man aber, daß nur solche Zustände sich infolge der Zusammenstöße der Elektronen mit dem Gitter nicht ändern, die in der Form (14), (18) dargestellt werden können, so folgt aus dem Verschwinden des elektrischen Stromes notwendig $n^1 = 0$, $N^1 = 0$, d. h. es gibt auch keinen stationären Zustand mit von Null verschiedenem Energiestrom.³⁾ Zur Berechnung der Wärmeleitung ist es also eine vernünftige

1) Vgl. etwa Handb. d. Phys. XIII. S. 18.

2) F. Bloch, Ztschr. f. Phys. im Erscheinen.

3) Diese Bemerkung gilt auch für den Fall der Supraleitung, was auch immer der Mechanismus der Supraleitung sei. Damit erklärt sich der scheinbar paradoxe Umstand, daß am Sprungpunkt keine Anomalie der Wärmeleitfähigkeit eintritt. Es ist also nicht nötig, anzunehmen, daß die supraleitenden Elektronen keine Energie transportieren, wie E. Grüneisen (Ztschr. f. Phys. 51. S. 652. 1928) annimmt.

Näherung, wenn man in (6) nur diejenigen Lösungen zuläßt, bei denen auf der rechten Seite Null steht. Dafür hätten wir eigentlich auch hier wieder die Wirkung der Anharmonizitäten zu berücksichtigen, etwa in der Weise, wie sie in W angesetzt wurden. Wir werden sie jedoch fortlassen und erst nachträglich verifizieren, daß diese Vernachlässigung erlaubt ist.

Dazu müssen wir nur zeigen, daß bei der stationären Verteilung, die wir ausrechnen werden, der Energiestrom, der vom Gitter transportiert wird, klein ist gegenüber dem gesamten Energiestrom. Die Anwesenheit der Anharmonizitäten kann dann die Verteilung noch so weit verzerren, daß dieser Energiestrom noch verringert wird, dazu ist aber nur eine geringe Änderung der Verteilung nötig, die den gesamten Energiestrom nicht erheblich ändern wird.

Wir haben wiederum die Gleichungen (19) zu lösen, nur ist in beiden noch ein Zusatzglied hinzuzufügen, das von dem Temperaturgefälle herrührt. Dabei ist zu beachten, daß man wiederum die f und ξ nur unscharf definieren kann, damit die Wellen in den verschiedenen Teilen des Kristalls verschiedene Intensität haben (Wellenpakete). Wir können uns aber auf die Ergebnisse von W berufen, in denen diese Rechnungen für die elastischen Wellen durchgeführt sind. Danach kann man setzen¹⁾:

$$(36a) \quad \dot{N}_f = v_f^x \cdot \frac{\partial N_f}{\partial x} = \gamma \cdot v_f^x \cdot \frac{\partial N_f}{\partial T}, \quad \left(\gamma = \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Die Überlegungen lassen sich wörtlich auf Elektronenwellen übertragen und liefern hier als Beitrag zu (19)¹⁾:

$$(36b) \quad \dot{n}_\xi = v^x(\xi) \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\hbar \gamma}{2\pi a m} \xi \cdot \frac{\partial n(\xi)}{\partial T}.$$

Insgesamt haben wir also die Gleichungen zu lösen:

$$(37a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\xi' f} W_{\xi' f}^0 \frac{1}{(e^\xi + 1)(e^{-\xi'} + 1)(e^x - 1)} \{ n_{\xi'}^1 (e^{\xi'} + 1)(e^{-\xi'} + 1) \\ & \quad - n_\xi^1 (e^\xi + 1)(e^{-\xi} + 1) - N_f^1 (e^x - 1)(e^{-x} - 1) \} \\ & = - \frac{2\pi a e F}{\hbar} \frac{\partial n^0}{\partial \xi} + \gamma \cdot v^x(\xi) \frac{\partial n^0}{\partial T} \end{aligned} \right.$$

1) Es wird wohl nicht zu Verwechslungen führen, daß der Buchstabe x in (36a, b) die räumliche Koordinate bezeichnet.

$$(37b) \left\{ - \sum_{\xi, \xi'} W_{\xi \xi'}^0 \frac{1}{(e^\xi + 1)(e^{-\xi'} + 1)(e^x - 1)} \cdot \{n_{\xi'}^1 (e^{\xi'} + 1)(e^{-\xi'} + 1) - \dots\} = \gamma \cdot v_{(f)}^x \frac{\partial N_f^0}{\partial T} \right.$$

Das Feld F ist dabei so zu bestimmen, daß die Gleichungen lösbar sind, d. h. daß die rechte Seite von (37a, b) auf (20) orthogonal ist. Die Lösung ist durch (37) nicht eindeutig bestimmt, denn man kann ja noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung hinzufügen. Diese Willkür brauchen wir gerade, um die Lösung so festzulegen, daß die Nebenbedingung Strom = 0 erfüllt wird.

Wir sehen, daß es hier auf die typischen Abweichungen vom kontinuierlichen Verhalten gar nicht ankommt, und können daher näherungsweise mit dem Energieausdruck (2) für freie Elektronen und mit dem Dispersionsgesetz

$$(38) \quad v = v_0 \sqrt{f^2 + g^2 + \hbar^2} = \frac{v}{2\pi a} \cdot \sqrt{f^2 + g^2 + \hbar^2}$$

des elastischen Kontinuums rechnen. Dann können wir die Richtungsabhängigkeit von n^1, N^1 durch den Ansatz zum Ausdruck bringen¹⁾:

$$(39) \quad n^1(\xi) = \xi c(\varepsilon) \frac{1}{(e^\varepsilon + 1)(e^{-\varepsilon} + 1)}; \quad N_f^1 = f \cdot b(x) \frac{1}{(e^x - 1)(e^{-x} - 1)}$$

wo b und c Funktionen von x bzw. ε sind, d. h. nicht mehr von der Richtung abhängen. So erhalten wir die Gleichungen:

$$(40a) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\xi, \xi'} W_{\xi \xi'}^0 f j \frac{\xi' c(s+x) - \xi c(s) - f b(x)}{(e^\varepsilon + 1)(e^{-\varepsilon-x} + 1)(e^x - 1)} \\ & \quad + W_{\xi \xi'}^0 f - j \frac{\xi' c(s-x) - \xi c(s) - f b(x)}{(e^\varepsilon + 1)(e^{-\varepsilon+x} + 1)(e^{-x} - 1)} \\ & = - \frac{4\pi a e F}{\hbar k T} \omega \xi \cdot \frac{1}{(e^\varepsilon + 1)(e^{-\varepsilon} + 1)} + \frac{\hbar \gamma \xi}{2\pi a m} \\ & \quad \cdot \left(\frac{s}{T} - \frac{1}{k T} \frac{\partial E_0}{\partial T} \right) \cdot \frac{1}{(e^\varepsilon + 1)(e^{-\varepsilon} + 1)} \end{aligned} \right.$$

1) Unsere Bezeichnung unterscheidet sich von der Blochschen um einen Faktor $-k T$.

$$(40b) \left\{ \begin{aligned} & - \sum_{\xi} W_{\xi}^0 \xi' f \frac{\xi' c(s+x) - \xi c(s) - f b(x)}{(e^s + 1)(e^{-s-x} + 1)(e^x - 1)} \\ & = \gamma \cdot v \cdot \frac{f}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}} \cdot \frac{x}{T} \cdot \frac{1}{(e^x - 1)(e^{-x} - 1)}. \end{aligned} \right.$$

Wir ersetzen wieder die Summe durch ein Integral, das sich in genau analoger Weise wie bei Bloch¹⁾ auswerten läßt. Als Endergebnis kommt:

$$(41a) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^2 \left(\frac{G}{4\pi} \right)^2 \cdot A \cdot \frac{\pi^2 v}{a h \omega \varrho} (e^{-s} + 1) \cdot \left\{ \frac{\xi}{2\varrho^2} \int_0^{v_0} v^4 dv \right. \\ & \cdot \left[\frac{b(x) - c(s+x)}{(e^{-s-x} + 1)(e^x - 1)} - \frac{b(x) - c(s-x)}{(e^{-s+x} + 1)(e^{-x} - 1)} \right] + \xi \cdot \left(\frac{v}{2\pi a} \right)^2 \\ & \cdot \int_0^{v_0} v dv \cdot \left[\frac{c(s) - c(s+x)}{(e^{-s-x} + 4)(e^x - 1)} - \frac{c(s) - c(s-x)}{(e^{-s+x} - 1)(e^{-x} - 1)} \right] \Bigg\} \\ & = \frac{4\pi a \omega \xi}{h} \left[\gamma \frac{s}{T} + \frac{\gamma}{kT} \frac{\partial E_0}{\partial T} + \frac{eF}{kT} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(41b) \left\{ \begin{aligned} & - \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^2 \left(\frac{G}{2\pi} \right)^2 \cdot A \cdot \frac{\pi^2 v}{a h \omega} \int \varrho d\varrho \\ & \cdot \frac{f b(x) + \frac{1}{2} f c(s) - \frac{3}{2} f c(s+x)}{(e^s + 1)(e^{-s} + 1)(e^x - 1)} = - \frac{v^2}{2\pi a} f \cdot \gamma \cdot \frac{h}{kT^2} \\ & \cdot \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}. \end{aligned} \right.$$

Für die Diskussion der Integralgleichungen (41) haben wir die beiden bekannten Grenzfälle zu unterscheiden.

§ 7. Grenzfall hoher Temperaturen

Falls $T \gg \Theta$, können wir die Lösung von (41) explizite angeben. Wir benutzen dabei die Orthogonalitätsbedingung, die nach (20), (40) die Form hat:

$$(42) \left\{ \begin{aligned} & \frac{4\pi a \omega}{h} \cdot \int \varrho^4 d\varrho \frac{\left(\gamma \frac{s}{T} + \frac{1}{kT} \frac{\partial E_0}{\partial T} + \frac{eF}{kT} \right)}{(e^s + 1)(e^{-s} + 1)} = \frac{v^2}{2\pi a} \cdot \gamma \\ & \cdot \frac{h}{kT^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^2 \cdot \int v^2 dv \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^5 = \gamma \cdot v \cdot \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^4 \cdot \frac{k}{h} \cdot \frac{v_0^3}{3}. \end{aligned} \right.$$

1) F. Bloch, a. a. O.

Es ist leicht zu sehen, daß eine partikuläre Lösung von (41) die Gestalt haben wird:

$$(43) \quad b(x) = \frac{\alpha}{\nu}$$

mit konstantem α . Setzen wir (43) in (41) ein, so erhalten wir für c unter Berücksichtigung von $x \ll 1$:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} c_0(\varepsilon) &= \frac{4\alpha}{3\nu_0} - \frac{4\pi\alpha\omega}{h} \cdot \left[\gamma \frac{\varepsilon}{T} + \dots \right] \left(\frac{v}{2\pi a} \right)^7 \left(\frac{2\pi}{G} \right)^3 \\ &\quad \cdot \frac{1}{A} \frac{a\omega\rho^3}{h^2 v} \frac{4h^2}{kT\nu_0^4} \cdot \end{aligned} \right.$$

Mit diesem Wert von c gehen wir wieder in (41b) ein und erhalten mit Rücksicht auf (42) durch Vergleich der Koeffizienten von $1/\nu$ und $1/\nu^2$ auf beiden Seiten die beiden Gleichungen für α :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\nu^2} \cdot \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^2 \left(\frac{G}{2\pi} \right)^3 \cdot A \cdot \frac{\pi^2 v}{a h^3 \omega} \frac{(kT)^2}{2\omega} &= - \frac{v^2}{2\pi a} \cdot \gamma \cdot \frac{k}{h \nu^2} \\ \frac{4\alpha}{3\nu\nu_0} \cdot \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^3 \cdot \left(\frac{G}{2\pi} \right)^3 \cdot A \cdot \frac{\pi^2 v}{a h^2 \omega} \frac{(kT)^2}{2\omega} &= - \left(\frac{v}{2\pi a} \right)^5 \cdot \frac{\gamma}{2\nu} \\ &\quad \cdot v \cdot \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^4 \cdot \frac{4k}{3h\nu_0} \end{aligned}$$

die, wie es sein muß, denselben Wert von α liefern, nämlich:

$$(45) \quad \alpha = -\gamma \cdot \left(\frac{v}{2\pi a} \right)^3 \cdot \left(\frac{2\pi}{G} \right)^3 \cdot \frac{k}{A} \frac{2a h \omega^2}{\pi^2 (kT)^2}.$$

Die allgemeine Lösung von (41) wird also dargestellt durch:

$$(46) \quad c(\varepsilon) = c_0(\varepsilon) + \beta \quad b(x) = \frac{\alpha}{\nu} + \beta,$$

denn $b = c = \text{const}$ ist offensichtlich eine Lösung der homogenen Gleichung. Die Konstante β bestimmt sich aus der Bedingung, daß der Strom verschwinden soll, der proportional ist zu¹⁾:

1) Hier und im folgenden treten stets Integrale vom Sommerfeldschen Typus auf, für die wir die Formel (28) aus A. Sommerfeld, Ztschr. f. Phys. 47. S. 1. 1928 bis zur zweiten Näherung übernehmen.

$$(47) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty \varrho^3 d\varrho \frac{c(\varepsilon)}{(1+c^2)(1+c^{-2})} d\varepsilon \\ &= \left(\frac{4\alpha}{3\nu_0} + \beta \right) \varrho_0^3 \cdot \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{E_0} \right)^2 \right] - \frac{4\pi a \omega}{h} \left(\frac{y}{2\pi a} \right)^7 \left(\frac{2\pi}{G} \right)^3 \\ & \quad \cdot \frac{1}{A} \left[\frac{a \omega^3}{v} \cdot h^2 \cdot \frac{4}{\nu_0^4} \cdot \frac{\gamma \varrho_0^8}{T E_0} \cdot \frac{25}{6} + \frac{\alpha \omega}{\pi^2 v} \cdot \frac{h^2}{kT} \cdot \frac{4}{\nu_0^4} \cdot \frac{eF}{kT} \varrho_0^6 \right]. \end{aligned} \right.$$

Wir berechnen F aus (42):

$$\begin{aligned} & - \frac{4\pi a \omega k T}{2 \omega h} \left[\frac{\gamma \omega \varrho_0^5}{k T^3} \pi^2 \left(\frac{k T}{E_0} \right)^2 \cdot \frac{13}{6} \cdot + \frac{e F}{k T} \cdot \varrho_0^3 \right] \\ & \quad = \gamma v \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^4 \cdot \frac{k}{h} \cdot \frac{\nu_0^3}{3}, \\ (48) \quad e F &= -\gamma \cdot \left[\frac{13}{6} \cdot \pi^2 \frac{\omega \varrho_0^5}{T} \left(\frac{k T}{E_0} \right)^2 + \left(\frac{2\pi a}{v} \right)^3 \cdot k \cdot \frac{\nu_0^3}{3 \varrho_0^3} \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir in (46) die Werte von α und F ein, so kommt:

$$(49) \quad \beta = k \gamma \nu_0^2 \left(\frac{2\pi}{G} \right)^3 \cdot \frac{8 a h \omega^2}{\pi^2 A (k T)^2} \left[\frac{2}{3} + 2 \pi^2 \varrho_0^3 \frac{k T}{E_0} \right].$$

Mithin wird der von den Elektronen transportierte Wärmestrom pro Volumeneinheit:

$$(50) \left\{ \begin{aligned} W_{el} &= \sum v_x \cdot \omega \varrho^2 \cdot \xi c(\varepsilon) \frac{1}{(e^\varepsilon + 1)(e^{-\varepsilon} + 1)} \\ &= \pi^3 256 \cdot k \gamma \nu_0^2 \frac{a^4 \cdot \omega^3 \varrho_0^6 \mu^3}{h C^2} \cdot \frac{M}{\nu}. \end{aligned} \right.$$

Entsprechend berechnet sich der von dem Gitter transportierte Wärmestrom zu:

$$(51) \left\{ \begin{aligned} W_G &= \sum v_f^x h \nu_f b(x) \cdot f \cdot \frac{1}{(e^x - 1)(e^{-x} - 1)} \\ &= - \frac{7 \cdot 64}{27} \cdot \pi^2 \cdot k \gamma \cdot \frac{\nu_0^3 a^4 \cdot \omega^2 \mu^2}{h C^3}. \end{aligned} \right.$$

Ein interessantes Resultat, das aus (51) folgt, ist, daß die Richtung des Wärmestroms im Gitter der Richtung des Temperaturgradienten *entgegengesetzt* ist. Das Gegenfeld F , das sich ausbildet, wirkt also stärker auf die Verteilung des Gitters als auf die der Elektronen. Ferner entnehmen wir aus (50) und (51), daß der Wärmestrom im Gitter etwa 0,02 des Gesamtwärmestroms beträgt. Die im vorigen Paragraphen diskutierte Vernachlässigung ist also zulässig. Unser Ergebnis über die Richtung des Energiestroms im Gitter hängt noch davon ab, daß wir die „Umklappprozesse“ vernachlässigt haben, und könnte

sich umkehren, wenn man sie berücksichtigt. Doch ändert sich dabei der Wert der Wärmeleitfähigkeit nicht merklich. Auf jeden Fall geht daraus hervor, daß sich die Leitfähigkeit des Metalls keineswegs additiv aus einer reinen Gitterleitung und einer reinen Elektronenleitung zusammensetzt. Ebenso wenig gilt eine Additivität für die Wärmewiderstände.¹⁾

Wir können aus (50) und (51) entnehmen, daß die Wärmeleitfähigkeit für hohe Temperaturen unabhängig von der Temperatur ist, in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund, sowie mit dem Wiedemann-Franz'schen Gesetz. Über den Zahlfaktor des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes lassen sich hier deswegen keine Aussagen machen, weil der genaue Wert der elektrischen Leitfähigkeit nicht bekannt ist. Insbesondere kann also die vorliegende Theorie nicht erklären, warum der Koeffizient des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes nicht von Metall zu Metall stark variiert.

Für die Größenordnung der Wärmeleitfähigkeit in *c.g.s.* erhalten wir ungefähr $6 \cdot 10^6$, während die empirischen Werte in der Nähe von $4 \cdot 10^7$ liegen. In Anbetracht der groben Vernachlässigungen, die wir an dem Dispersionsgesetz vorgenommen haben, sowie der fortgelassenen Umklappprozesse ist eine exaktere Übereinstimmung nicht zu erwarten.

§ 8. Grenzfall tiefer Temperaturen

Für $T \ll \Theta$ tragen nur diejenigen Gebiete etwas zur Integration (41a) bei, in denen $x \lesssim 1$, daher $\frac{\nu}{\nu_0} \ll 1$, ist. Wir können dann auf der linken Seite von (41a) das erste Glied gegenüber dem zweiten vernachlässigen. Die so entstehende Gleichung bleibt immer noch lösbar, weil die zugehörige homogene Gleichung keine neue Lösung bekommt. Nun verschwindet allerdings die rechte Seite von (41a) allein nicht, wenn man sie mit ξ multipliziert und über $d\xi d\eta d\zeta$ integriert, sondern dieses Integral wird gleich dem entsprechenden Integral über die rechte Seite von (41b). Wir können jedoch F , statt es aus der früheren Bedingung zu bestimmen, so wählen, daß das

1) Vgl. E. Grüneisen u. E. Goens, *Ztschr. f. Phys.* **44**. S. 615. 1927; E. Grüneisen, *Ztschr. f. Phys.* **51**. S. 652. 1928; sowie A. Encken, *Ztschr. f. phys. Chem.* **134**. S. 220. 1928 u. a.

erste Integral allein verschwindet. Dabei machen wir in I' und folglich auch im Endresultat einen Fehler von der relativen Größenordnung:

$$\frac{v_G c_G}{v_{el} c_{el}}.$$

Dabei bezeichnen v_G , v_{el} die mittleren Geschwindigkeiten der Schallwellen bzw. der Elektronen, c_G und c_{el} die spezifischen Wärmen. Der Fehler geht also mit abnehmender Temperatur wie T^2 gegen Null. Wir haben also $c(\epsilon)$ aus der Gleichung zu bestimmen, die entsteht, wenn man auf der linken Seite von (41a) das erste Glied streicht. Es entspricht ferner derselben Näherung, die rechte Seite von (41b) fortzulassen. Dann wird offensichtlich b von derselben Größenordnung wie c , und daher wird der mittlere Energiestrom im Gitter verschwindend klein gegenüber dem von den Elektronen transportierten (das Verhältnis beider geht wieder wie T^2 gegen Null). Wir brauchen uns also gar nicht mehr um (41b) zu kümmern. In (41a) führen wir noch x statt als Integrationsvariable ein und entwickeln dann beide Seiten der Gleichung, sowie die Funktion c nach positiven und negativen Potenzen von T . Dabei sehen wir durch Vergleich der beiden Seiten, daß die niedrigste in c wirklich auftretende Potenz T^{-4} sein muß. Bei der Bildung des Wärmestromes entsprechend (50) kommt noch ein Faktor T hinzu, weil man $d\epsilon$ statt $\rho d\rho$ als Integrationsvariable einführen muß, um auf das Sommerfeldsche Integral zu kommen. Außerdem ist zu beachten, daß wir ja diejenige Lösung der Gleichung zu wählen haben, für die der elektrische Strom verschwindet, und das bedeutet, daß sich bei der Bildung von W_{el} die niedrigste Potenz von T gerade forthebt. Wir bekommen also in der Grenze für tiefe Temperaturen für das Wärmeleitvermögen κ ein Gesetz der Form

$$(52) \quad \kappa = \text{const} \cdot T^{-2},$$

das durch die Erfahrung bestätigt wird.¹⁾

Wir sehen, daß die Theorie bei tiefen Temperaturen das Wiedemann-Franzsche Gesetz nicht mehr liefert, denn das Verhältnis von Wärme- und elektrischer Leitfähigkeit wird ja

1) E. Grüneisen, Ztschr. f. Phys. 46. S. 151. 1927.

hier proportional T^2 . Der Grund dafür ist, daß bei den klassischen Ableitungen des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes wesentlich der klassische Stoßzahlansatz benutzt wurde, der, wie Bloch betonte, für tiefe Temperaturen nicht mehr zulässig ist, da dort das Pauliprinzip eine wesentliche Rolle spielt. Es ist also nicht notwendig, die theoretische Gültigkeit dieses Gesetzes durch besondere Annahmen zu retten.¹⁾

Wir möchten bei dieser Gelegenheit betonen, daß die empirische Regel, die von Grüneisen und Goens²⁾, als Ersatz dieses Gesetzes aufgestellt wurde, theoretisch durchaus verständlich erscheint. Es handelt sich um das „Gesetz der isothermen Geraden“, wonach bei dem Vergleich der Leitfähigkeiten verschiedener Metallproben bei gleicher Temperatur das Wiedemann-Franz'sche Gesetz gilt, sofern man statt der spez. Widerstände die Differenz aus dem spez. Widerstande des betrachteten Exemplars und demjenigen eines ideal reinen Einkristalls bei der betreffenden Temperatur einsetzt.

Das Gesetz wäre vollkommen verständlich, wenn in Strenge eine Additivität des „idealen“ Widerstands mit dem „Restwiderstand“, der von den Verunreinigungen herrührt, gelten würde, und zwar sowohl für elektrische wie thermische Leitfähigkeit. Denn der Restwiderstand rührt in beiden Fällen von der Streuung der Elektronenwellen an den gestörten Stellen des Gitters her, bei der die Energie der Elektronen keine Änderung erfährt. (Man kann leicht abschätzen, daß bei tiefen Temperaturen die Streuung der elastischen Wellen dagegen ganz zu vernachlässigen ist.) Wären nun die Gitterstörungen als einzige Ursache eines endlichen Widerstands vorhanden, so würde das Wiedemann-Franz'sche Gesetz streng gelten, weil es dann, wie Nordheim³⁾ gezeigt hat, zulässig ist, mit dem klassischen Stoßzahlansatz zu operieren. Bestände also Additivität der Widerstände, so würde das Gesetz eben gerade noch für die oben gebildeten Differenzen gelten.

In Strenge gilt eine solche Additivität nicht. Für die elektrische Leitung resultiert sie, sobald unser Näherungsverfahren von § 2 zulässig ist, dagegen wird sie wohl in höheren

1) E. Grüneisen, Ztschr. f. Phys. 51. S. 652. 1928.

2) E. Grüneisen u. E. Goens, Ztschr. f. Phys. 44. S. 615. 1927.

3) L. W. Nordheim, Proc. Roy. Soc. 119. S. 689. 1928.

Näherungen nicht mehr gelten. Ebenso sieht man aus den Gleichungen (41), daß sie für die Wärmeleitung nicht gilt, denn man hat ja auf der linken Seite ein Zusatzglied hinzuzufügen, und das wird die Form der Funktionen b und c verändern. Dagegen kann man sicher sein, daß in dem Grenzfall tiefer Temperaturen, wenn der Restwiderstand groß ist gegenüber dem idealen, d. h. wenn das Zusatzglied groß ist gegenüber den in (41) ausgeschriebenen, der Widerstand näherungsweise gleich dem reinen Restwiderstand wird, d. h. demjenigen, für den die Rechnungen von Nordheim und somit auch das Wiedemann-Franzsche Gesetz gelten.

§ 9. Zusammenfassung

Einige vereinfachende Annahmen der bisherigen Leitfähigkeitstheorien werden diskutiert und erweisen sich dabei als unzulässig. Es wird ein strengerer Ansatz mitgeteilt und gezeigt, daß sich die Resultate über Temperaturabhängigkeit und Größenordnung der elektrischen Leitfähigkeit bei hohen Temperaturen unverändert wiedergewinnen lassen, das letztere allerdings nur in recht grober Abschätzung. Für tiefe Temperaturen ($T \ll \Theta$) ergibt sich Proportionalität der Leitfähigkeit mit T^{-4} in Übereinstimmung mit dem empirischen Gesetz.

Die gleiche Methode wird zur Berechnung der thermischen Leitfähigkeit verwendet. Man kann so die richtige Größenordnung des Wärmeleitvermögens erhalten. Im Grenzfall tiefer Temperaturen erhielten wir Proportionalität der thermischen Leitfähigkeit mit T^{-2} , für hohe Temperaturen Temperaturunabhängigkeit, in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Die vorstehenden Problemstellungen erfuhren durch zahlreiche Diskussionen mit Hrn. Prof. Pauli eine wesentliche Klärung. Ich möchte ihm dafür meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidg. Techn. Hochschule, November 1929.

(Eingegangen 6. Dezember 1929)

Über die Ionisierung von Alkaliatomen durch langsame Elektronen¹⁾

Von Hans Funk

(Mit 13 Figuren)

I. Einleitung

Die Methoden des langsamen Elektronenstoßes sind seit den grundlegenden Versuchen von Franck und Hertz ein unentbehrliches Hilfsmittel der experimentellen Physik zur Untersuchung des Baues der äußeren Elektronenhülle von Atomen und Molekülen geworden. Nachdem es in vielen Fällen gelungen ist, diskrete Anregungs- und Ionisierungsstufen zu finden, die — bis auf wenige Ausnahmen — in Verbindung mit quantentheoretischen Überlegungen in voller Übereinstimmung mit spektroskopischen Daten sind, ist es das Problem der Ausbeute, das nunmehr in den Vordergrund des Interesses gerückt ist, Ausbeute verstanden in dem Sinn, daß nach dem Prozentsatz der gaskinetischen Stöße zwischen Elektronen und Atomen (für Moleküle gilt Sinngemäßes) gefragt wird, der zu einer Anregung oder Ionisierung führt. Die funktionale Abhängigkeit der Ausbeute von der Geschwindigkeit der Elektronen stellt die Anregungs- bzw. Ionisierungsfunktion dar. In beiden Fällen ist zu beachten, daß die Ausbeute bezogen ist auf unendlich kleine Stromdichte des Elektronenstrahls und außerdem auf eine unendlich dünne zu durchsetzende Schicht, so daß für die Elektronen keine andern Energieverluste und für die Atome keine andern Energiegewinne als die gerade betrachteten auftreten. Der Ausgangszustand für die getroffenen Atome muß das neutrale, unangeregte Atom sein.

Der Begriff der Anregungsfunktion wurde erstmals von Seeliger in die Physik eingeführt.²⁾ Man hat zu unterscheiden

1) Dissertation der Technischen Hochschule München.

2) R. Seeliger, *Ann. d. Phys.* **59**. S. 613. 1919; *Phys. Ztschr.* **25**. S. 56. 1924.

zwischen der Anregungsfunktion eines Spektralterms, worunter die Wahrscheinlichkeit zu verstehen ist, daß das Atomelektron auf eine höhere Energiestufe gehoben wird, und der Anregungsfunktion einer Spektrallinie, dargestellt durch die Abhängigkeit der Intensität einer Spektrallinie von der Geschwindigkeit der stoßenden Elektronen. Entsprechend den verschiedenen Definitionen ist auch die Art der Messung verschieden; im ersten Fall mißt man rein elektrisch, indem man die Elektronen vor und nach dem Stoß verfolgt, im zweiten Fall mißt man die Intensität der emittierten Linien in Abhängigkeit von der Voltgeschwindigkeit der Elektronen, was aber nur relative Werte liefern kann. Solche Untersuchungen wurden zahlreich von Seeliger und seinen Mitarbeitern¹⁾ angestellt, in neuerer Zeit widmet sich diesen Fragen besonders eingehend W. Hanle.²⁾

Bei der Ionisierungsfunktion fällt die erwähnte Komplikation bei der Definition weg. Entsprechend der Bedingung der unendlich dünnen Schicht ist bei der Messung der Gasdruck so niedrig zu wählen, daß nicht nur zwei Ionisierungen pro Elektron genügend unwahrscheinlich sind, sondern auch vorhergehende Energieverluste durch Anregung. Ebenso sollen Doppeltreffer auf dasselbe Atom ausgeschlossen sein. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt wären, hätte man mit komplizierten Integralwirkungen zu rechnen; beispielsweise würden sich die Ionisierungswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Atomelektronen überlagern und die zu einem bestimmten Elektron gehörige Kurvenform verschleiern.

Die Theorie der Ionisierung durch Elektronenstoß hat J. J. Thomson³⁾ gegeben. Ihr Grundgedanke ist folgender: Das stoßende Elektron durchdringt das Atom und tritt mit den Atomelektronen in Wechselwirkung. Das Atomganze kann hierbei als ruhend angesehen werden, denn die thermische Molekulargeschwindigkeit ist so gering (Größenordnung 10^4 cm/sec), daß sie gegenüber der Lineargeschwindigkeit der Stoß-

1) Literatur in R. Seeligers „Einführung in die Physik der Gasentladungen“, Barth, Leipzig 1927.

2) W. Hanle, Naturwiss. 15. S. 832. 1927; Ztschr. f. Phys. 56. S. 94. 1929.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. 23. S. 449. 1912. Vgl. auch Handbuch der Physik von Geiger-Scheel, 24. Artikel von W. Bothe, „Durchgang von Elektronen durch Materie“.

elektronen (Größenordnung 10^8 cm/sec) vernachlässigt werden kann. Um ein Elektron aus dem Atomverband zu entfernen, muß ihm eine bestimmte Mindestenergie zugeführt werden, die Ionisierungsarbeit. Die Thomsonsche Theorie nimmt nun an, daß der Stoß lediglich gegen das betrachtete Elektron gerichtet ist und nicht gegen das Atom. Für die dem Valenzelektron beim Stoß übertragene Energie Q ergibt die klassische Rechnung den Betrag:

$$(1) \quad Q = \frac{1}{2} m v_0^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{e^2} \cdot \frac{1}{2} m v_0^2 \right)^2}$$

(hierin bedeuten m , e , v_0 Masse, Ladung, Geschwindigkeit des Stoßelektrons und p den „Stoßparameter“). Ionisation tritt dann und nur dann ein, wenn diese Energie größer wird als die Ionisierungsarbeit W_i :

$$Q \geq W_i.$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten reicht die Energie des Stoßelektrons auch bei zentralem Stoß ($p=0$) nicht aus. Für größere Geschwindigkeiten ist aus Formel (1) leicht zu sehen, daß ein Grenzwert für p existiert, $p=p_i$, der so beschaffen ist, daß die übertragene Energie nur ausreicht, wenn p kleiner ist als dieser Grenzwert:

$$Q \geq W_i \quad \text{für} \quad p \leq p_i.$$

Für die weitere Betrachtung ist es daher bequemer, die Formel (1) nach p_i^2 aufzulösen:

$$p_i^2(v_0) = \frac{e^4}{\frac{1}{2} m v_0^2} \left[\frac{1}{W_i} - \frac{1}{\frac{1}{2} m v_0^2} \right]$$

oder, in Voltgeschwindigkeiten geschrieben:

$$\begin{aligned} p_i^2(V) &= \frac{e^4}{e V} \left[\frac{1}{e V_i} - \frac{1}{e V} \right] = \frac{e^2}{V_i^2} \cdot \frac{V_i}{V} \left[1 - \frac{V_i}{V} \right] \\ &= \frac{e^2}{V_i^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{u}}{u}, \end{aligned}$$

wobei $u = \frac{V_i}{V}$ gesetzt ist. Diese Funktion p_i^2 hat ein Maximum an der Stelle:

$$V = 2 V_i.$$

Wir können nun $p_i^2 \cdot \pi$ mit dem für die Ionisierung wirksamen Querschnitt eines Atoms identifizieren und zum gaskinetischen Querschnitt $a^2 \pi$ in Beziehung setzen, der Quotient beider stellt die Ausbeute dar; wir erhalten also als mathematischen Ausdruck für die Ionisierungsfunktion f :

$$(2) \quad f(V) = \frac{p_i^2 \pi}{a^2 \pi} = \frac{e^2}{a^2 V_i^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{u}}{u}$$

mit dem Wert an der Stelle des Maximums ($u = 2$):

$$(3) \quad f(2V_i) = \frac{e^2}{4a^2 V_i^2}.$$

Für sehr große Geschwindigkeiten ($\frac{1}{u} \ll 1$) nimmt die Ausbeute ab mit $1/u$, d. h. umgekehrt proportional der Voltgeschwindigkeit des Stoßelektrons.

Was nun das bisher vorliegende experimentelle Material anbelangt, so sind die älteren Messungen alle mit Apparaturen gemacht, die von dem zu untersuchenden Gas bzw. Dampf ganz erfüllt sind. Die so erzielten Ergebnisse können aber aus verschiedenen Gründen nur recht ungenau sein. Erstens einmal ist zur Angabe des Zahlenwertes der Ausbeute die Kenntnis der Zahl aller Zusammenstöße notwendig, die ein Elektron auf seinem Weg durch das Gas erleidet. Diese Zahl kann bloß angegeben werden, wenn man den vom Elektron tatsächlich zurückgelegten Weg kennt. Dieser ist aber durchaus nicht gleich der geradlinigen Entfernung von Elektronenquelle und Auffangeplatte, sondern größer infolge der auch beim elastischen Stoß auftretenden Richtungsänderung. Für diese Richtungsänderung muß man unter mehr oder weniger komplizierten Annahmen einen Mittelwert zu errechnen suchen, und hieraus und aus den speziellen Apparatdimensionen ergibt sich dann die Stoßzahl. Es ist einleuchtend, daß diese Art der Berechnung beträchtliche Fehlerquellen in sich birgt. Außerdem hat man, wenn man als Elektronenquelle einen Glühfaden verwendet, noch mancherlei andere Schwierigkeiten. Durch die hohe Temperatur tritt in der Umgebung des Glühfadens eine (in ihrer Größe kaum angebbare) Änderung des Gasdruckes und damit der freien Weglänge ein, auch muß man das Auftreten von turbulenten Strömungen sowie bei Untersuchung von Molekülen evtl. Dissoziation in Rechnung stellen. Es können also solche Messungen

nur ein rohes Bild des wirklichen Verlaufs der Ionisierungsfunktion geben.

Zum erstenmal ist die Häufigkeit ionisierender Stöße gemessen von Kossel.¹⁾ Diese sowie einige spätere Arbeiten²⁾ ergaben folgendes: die Ausbeute ist gleich Null bei der Ionisierungsspannung, steigt zu einem Maximum an, das ungefähr beim 8—12fachen der Ionisierungsspannung liegt, und nimmt dann wieder langsam ab. Der allgemeine Kurvenverlauf ist in allen Fällen ähnlich, sowohl für einatomige Gase oder Dämpfe (He, Ne, A, Hg) als auch für Moleküle (H_2 , N_2 , HCl, CO, CO_2). Im letzteren Fall ist in den Kurven keinerlei Singularität zu sehen, die einer etwaigen Ionisierung in mehreren Stufen entspräche. Andere Messungen ergaben einen prinzipiell anderen Verlauf der Ionisierungsfunktion, nämlich den Maximalwert bei der Ionisierungsspannung und dann exponentiellen Abfall.³⁾

Man kann sich nun einfachere und übersichtlichere Verhältnisse versprechen von einer Anordnung, bei der man den zu untersuchenden Stoff an einer kleinen Raumstelle sozusagen konzentriert, mit anderen Worten: in Form eines Atomstrahls verwendet. Man erhält besonders einfache Verhältnisse, wenn man einen Elektronenstrahl von möglichst homogener Geschwindigkeit einen Atomstrahl unter einem rechten Winkel durchsetzen läßt. Der Atomstrahl soll überall die gleiche Dicke haben und breiter sein als der Elektronenstrahl, damit alle Elektronen die gleiche Schichtdicke zu durchdringen haben. Da die Dampfdichte im Atomstrahl von selbst so gering ist, daß, mit dem gaskinetischen Atomquerschnitt gerechnet, die freie Weglänge eines Elektrons viel größer ist als die Dicke des Atomstrahls, hat man keine Schwierigkeit bei der Angabe der Stoßzahl: der von den Elektronen im Atomstrahl zurückgelegte Weg ist gleich der Dicke des Atomstrahls. Das Arbeiten mit einem Atomstrahl bringt aber noch weitere Vorteile. Da die fliegenden Atome an der Auftreffstelle quantitativ niedergeschlagen werden, kommen sie mit keinem weiteren Teil der

1) W. Kossel, Ann. d. Phys. 37. S. 393. 1912.

2) F. Mayer, Ann. d. Phys. 45. S. 1. 1914. K. T. Compton u. C. C. van Voorhis, Phys. Rev. (2) 27. S. 724. 1926. I. Langmuir u. H. A. Jones, Phys. Rev. (2) 27. S. 806. 1926; A. Ll. Hughes u. E. Klein, Phys. Rev. (2) 23. S. 111. 450. 1924 u. a.

3) E. O. Lawrence, Phys. Rev. (2) 28. S. 947. 1926.

Apparatur in Berührung, wodurch es möglich ist, Substanzen zu verwenden, die als Gas oder Dampf nicht untersuchbar wären, weil sie beispielsweise die Elektroden oder die Wände der Apparatur angreifen würden. Auch kann eine Glühkathode, wenn sie sich außerhalb des Strahls befindet, keinerlei Rückwirkung auf die fliegenden Atome haben.

Vor einiger Zeit, als die vorliegende Arbeit sich bereits ihrem Ende näherte, hat v. Hippel¹⁾ über Versuche berichtet, die ebenfalls die Bestimmung der Ionisierungsausbeute zum Gegenstand haben. v. Hippel hat seine Messungen an einem Quecksilberatomstrahl gemacht und, wenn auch noch mit Unzuverlässigkeiten behaftet, das von der Thomsonschen Theorie geforderte Maximum zum erstenmal verifiziert.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit sollte in Verfolgung der oben angedeuteten Überlegungen sein, eine Anordnung zu schaffen, die die Methode des langsamen Elektronenstoßes auf Atomstrahlen anzuwenden, die Größenordnung der noch meßbaren Effekte abzuschätzen und die Anregungs- und Ionisierungsausbeute zu bestimmen gestattet. Als zu untersuchende Stoffe waren die Alkalien und zwar zunächst K und Na in Aussicht genommen.

Das hier angedeutete Ziel hat sich bisher allerdings nicht in vollem Umfang verwirklichen lassen. Es war nach Arbeiten von Williamson²⁾ über die Ausbeute bei Anregung der Resonanzlinie von K zu hoffen, daß die Bestimmung dieser Größe am Atomstrahl mit verhältnismäßig unempfindlichen Mitteln möglich sein würde. Williamson definiert eine mittlere freie Weglänge der Anregung und bringt diese in Verbindung mit der mittleren freien Weglänge der kinetischen Gastheorie. Er findet, daß die freie Weglänge der Anregung je nach dem Dampfdruck 7—14mal kleiner sei als die gaskinetisch berechnete. Im selben Verhältnis wäre dann die Ausbeute größer als 100 Proz. Meine ersten Messungen (vgl. später S. 160) schienen die Angaben Williamsons zu bestätigen, doch wurde die Ursache für diese große Ausbeute bald in einer in der Apparatur vorhandenen K-Streustrahlung gefunden. Nach deren Beseitigung konnte mit der damaligen Apparatur kein Effekt mehr festgestellt werden, so daß man jedenfalls sagen kann, daß die

1) A. von Hippel, Ann. d. Phys. **87**. S. 1035. 1928.

2) R. C. Williamson, Phys. Rev. (2) **24**. S. 134. 1924.

Versuche keine Anhaltspunkte für eine so große Ausbeute ergeben haben.

Es wird daher im folgenden nur von der Ausbeute der Ionisierung zu reden sein und es wird gezeigt werden, daß das theoretisch zu erwartende Maximum bei der doppelten Ionisierungsspannung auch bei K und Na auftritt.

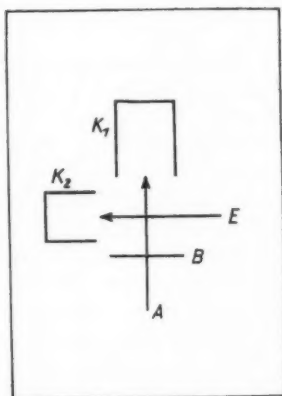
II. Versuchsanordnung

a) Das Prinzip der Versuchsanordnung

Den Grundgedanken der verwendeten Anordnung zeigt Fig. 1. Der Atomstrahl A geht senkrecht von unten nach

oben. Horizontal trifft auf ihn ein Elektronenstrahl E von möglichst homogener Geschwindigkeit, dessen Querschnitt schmaler ist als die Breite des Atomstrahls. Der Käfig K_2 fängt die durchgegangenen Elektronen auf; dieser Strom wird mit einem Galvanometer gemessen (i_{et}). Der Käfig K_1 dient als Niederschlagsfläche für den Atomstrahl und gleichzeitig zur Auffangung der im Stoßraum gebildeten Ionen. Von K_1 führt eine Leitung zu einem Elektrometer, der Ionenstrom (i_i) wird durch Aufladung des Elektrometers gemessen. Das in der Apparatur vorhandene Restgas wird im Stoßraum ebenfalls ionisiert, zum mindesten ein Teil dieser Ionen kann auch in den Ionenkäfig gelangen. Unterhalb der Zusammenstoßstelle der beiden Strahlen befindet sich deshalb eine von außen drehbare Blende B , mit deren Hilfe es möglich ist, die beiden Anteile des Ionenstroms durch eine Differenzmessung zu trennen.

Es wurde bei jeweils konstanter Beschleunigungsspannung der Elektronen abwechselnd die Käfigaufladung bei abgeblendetem Atomstrahl (Restgas allein) und dann bei durchgehendem Strahl (Restgas + Atomstrahl) gemessen, die Differenz gibt den zum



Schema der Anordnung

A Atomstrahl, E Elektronenstrahl, K_1 Ionenkäfig, K_2 Elektronenkäfig, B Abschirmblende

Fig. 1

Atomstrahl gehörigen Anteil. Um von Schwankungen des Elektronenstroms unabhängig zu sein, wurde der Ionenstrom immer durch den zugehörigen Elektronenstrom dividiert.

b) Die praktische Ausführung der Versuchsanordnung

Da über das Arbeiten mit Atomstrahlen und langsamen Elektronen erst Erfahrungen gesammelt werden mußten, waren die Versuche nicht von vornherein in der Richtung begonnen, mit der Apparatur sofort Ausbeutemessungen machen zu können. Vielmehr wurden die Teilaufgaben einzeln in Angriff genommen und erst nach einer mindestens teilweisen Lösung kombiniert.

1. Die Elektronenquelle

Sowohl Resonanz- wie Ionisierungsspannungen der Alkalien sind sehr niedrig (K: 1,6 bzw. 4,3 Volt, Na: 2,5 bzw. 5,1 Volt); die ersten Bemühungen waren demgemäß darauf gerichtet, eine Elektronenquelle zu schaffen, die Elektronen von der verlangten kleinen Geschwindigkeit in großer Intensität und von möglichst engem Geschwindigkeitsbereich liefert. Viele von den in dieser Richtung gemachten Versuchen seien hier übergangen und nur einige wichtig erscheinende Gesichtspunkte angeführt.

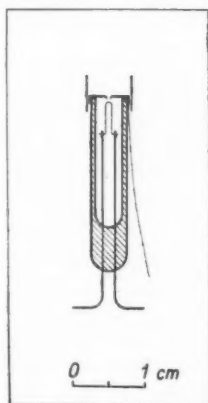
Aus Gründen der Intensität kam keine lichtelektrische, sondern nur eine glühelektrische Auslösung der Elektronen in Frage. Von den verschiedenen denkbaren Formen einer Glühkathode aber schien der Vorzug nicht einer Äquipotentialkathode, etwa nach Hertz¹⁾ oder Goucher²⁾ zu gebühren, weil bei diesen der Heizstrom so groß ist, daß sein Magnetfeld stören würde. Überhaupt haben die Versuche gezeigt, daß es gerade das Magnetfeld des Heizstroms ist, das das Erreichen kleiner Geschwindigkeiten so schwierig macht, wenn man unter Verwendung mehrerer Blenden einen scharf begrenzten Elektronenstrahl erhalten will. (Aus diesem Grund dürfte auch die von v. Hippel [a. a. O.] angegebene Form einer durch Strahlung geheizten Ba-Äquipotentialkathode für die hier verlangten Geschwindigkeiten nicht brauchbar sein [annähernd 20 Volt Heizspannung]; für seine Messungen oberhalb 14 Volt Elektronengeschwindigkeit stört das Magnetfeld nicht merklich.)

1) G. Hertz u. R. H. Kloppers, Ztschr. f. Phys. **31**. S. 463. 1925.

2) F. S. Goucher, Phys. Rev. (2) **8**. S. 561. 1916.

Die Versuche mit Oxydkathoden befriedigten nicht, da die kleinsten Spannungen nicht erreicht werden konnten, ebenso wenig Versuche mit der Methode, die z. B. von Skinner¹⁾ angegeben worden ist mit starker Beschleunigung und nachträglicher Verzögerung der Elektronen, da die ursprünglich homogene Geschwindigkeit durch die verschiedenen Blenden gestört wird. Schließlich gelangte ich zu folgenden zwei Formen von Wolframkathoden, die sich beide gut bewährt haben. Beide geben eine Geschwindigkeitsverteilung, die kaum größer ist als die Maxwell'sche, und liefern bis herab zu niedrigsten Spannungen relativ starke Intensitäten.

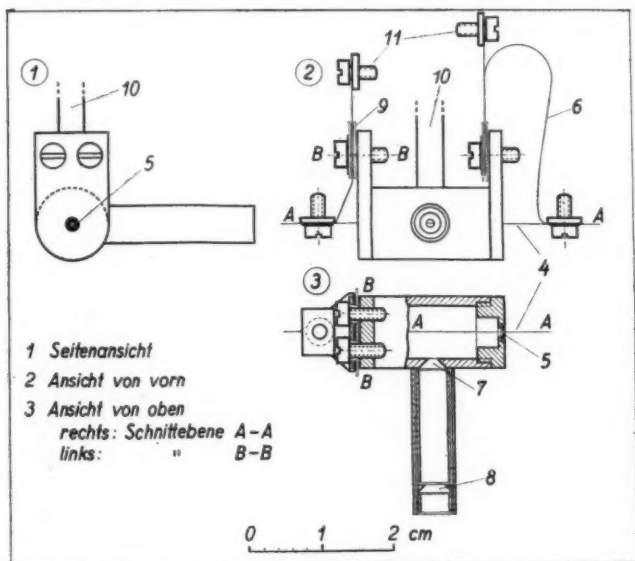
Zu der ersten Form A gelangte ich durch die Überlegung, daß die Emission um so stärker sein müsse, je größer die Feldstärke an der Kathode und je weniger das ganze Feld räumlich ausgedehnt ist, und um so homogener, je kürzer das emittierende Stück des Glühdrahtes ist. Eine Ausführungsform dieser Elektronenquelle zeigt Fig. 2. Ein W-Draht von 0,065 mm Durchmesser und 10—12 mm Länge wird spitzwinklig umgebogen (Haarnadelform) und seine Enden in Eisendrähte von 0,6 mm Durchmesser eingeklemmt. Die beiden Drähte werden in ein Glasröhrchen von 5 mm Durchmesser eingeschmolzen, das etwa $\frac{1}{2}$ mm oberhalb der W-Spitze abgesprengt wird. Auf dem Glasrohr wird eine Lochblende in dünnem Nickelblech ($\frac{1}{10}$ mm stark) mit dünnem Draht festgebunden und darüber noch ein kurzer Zylinder aus demselben Blech befestigt, um jeden schädlichen, seitlichen Austritt von Elektronen zu verhindern. Die Herstellung der Lochblende geschah so: nachdem das Nickelblech auf dem Glasrohr befestigt war, wurde mit einer Nähnadel ein Loch durchgestochen; auf diese Weise erreicht man gleichzeitig eine sehr günstige, abgeschrägte Form des Loches. Der Zuleitungsdraht zur Blende ist hart angelötet.



Elektronenquelle
Form A
Fig. 2

1) H. W. B. Skinner, Proc. Roy. Soc. London (A) 112. S. 642. 1926.

Die andere Form einer guten Elektronenquelle nahm ihren Ausgangspunkt von der Betrachtung der Elektrodenanordnung in einer gewöhnlichen Verstärkerröhre mit zylindersymmetrischer Anordnung. Denkt man sich um den gerade ausgespannten Glühdraht in kleinem Abstand eine zylindrische Anode angebracht mit einer kleinen Öffnung in der Mitte, so hat man



Elektronenquelle. Form B

- | | | |
|------------------|--------------------|----------------|
| 4 Glühfaden | 7 erste Blende | 10 Halter |
| 5 Lagersteinchen | 8 zweite Blende | 11 Zuführungen |
| 6 Feder | 9 Glimmerblättchen | |

Fig. 3

für die durch die Öffnung herauskommenden Elektronen ähnliche Verhältnisse wie oben beschrieben: größte Feldstärke am Glühdraht, sehr kurzes wirksames Stück des Glühfadens. Infolgedessen müssen sich auch hier die Gegenspannungskurven denen einer Äquipotentialkathode nähern. Die Ausführungsform dieser Elektronenquelle ist aus Fig. 3 zu ersehen, sie ähnelt einer inzwischen auch von Kollath¹⁾ angegebenen Kon-

1) R. Kollath, Ann. d. Phys. 87. S. 259. 1928.

struktion. Ein Wolframdraht von 0,065 mm Durchmesser ist in einem Messingzylinder federnd gespannt, zur Führung dienen Taschenuhr-Lagersteinchen. Die Isolation der Zuleitungen von den seitlichen, auf den Mittelteil aufschraubbaren Abschlußstücken des Zylinders besteht aus Glimmer. Seitlich in der Mitte des Zylinders befindet sich ein kreisförmiges, abgeschrägtes Loch von 1 mm Durchmesser, darüber ist ein zweites Messingrohr hart angelötet, das zur Aufnahme einer zweiten, verschiebbaren, mit Stellringen festgehaltenen Blende dient. Alle Teile waren innen berußt zur Vermeidung von Elektronenreflexion.

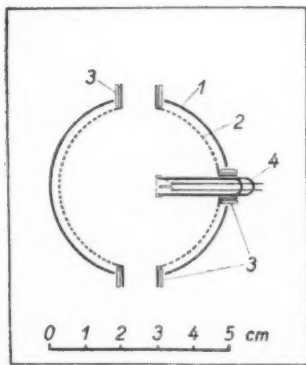
Prüfung der Elektronenquellen. Die Form A gibt schon bei geringem Heizstrom starke Emission, es konnten z. B. bei 0,8 Amp. Heizstrom und 1—2 Volt beschleunigender Spannung bei einem Blendendurchmesser von 0,6 mm 10^{-6} Amp. durchgegangener Strom erreicht werden. Der Spannungsabfall am Faden betrug etwa $\frac{3}{4}$ Volt. Form A hat außerhalb kein merkliches Magnetfeld und ist, da sie sehr wenig Metallteile enthält, leicht zu entgasen. Als Nachteil ist zu erwähnen, daß eine Auswechslung des Glühfadens nicht möglich ist. Arbeitet man bloß mit einer Blende (wie in der Figur gezeichnet), so erfolgt die Elektronenemission in der Hauptsache in einem Winkelbereich von 15—20°. Will man eine schärfere Ausblendung, so ist es leicht, statt der einen Blende ein auf das Glasrohr gut passendes Metallrohr mit der gewünschten Anzahl verschiebbarer Blenden (ähnlich wie bei Form B) aufzusetzen, als wesentlich ist dabei nur zu beachten, daß das Metallrohr nicht zu weit nach hinten über den Glühfaden hinausreicht, da sonst die räumliche Konzentration des elektrostatischen Feldes ungünstig beeinflußt wird.

Bei der Form B sind Heizstrom und Emission annähernd von derselben Größe wie bei Form A.

Die Prüfung der beiden Elektronenquellen auf Homogenität geschah durch Aufnahme von Gegenspannungskurven mit einer Anordnung, die in Fig. 4 schematisch dargestellt ist. Die Auffangeplatte und das davorliegende Netz hatten Kugelform. Die Elektronenquelle ist von der Seite in die Kugeln eingeführt, ihre Austrittsblende befand sich nahe der Kugelmitte. Die Netzkugel (2), von der Auffangekugel (1) durch Glas (3) isoliert, hatte dasselbe Potential wie die Blende, so daß innerhalb der Netzkugel ein feldfreier Raum war und die Elektronen nach

dem Durchtritt durchs Netz immer parallel den Kraftlinien fliegen. Wenn das nicht der Fall wäre, würde man fehlerhafte Gegenspannungskurven erhalten. Kugel (1) führte zu einem Galvanometer.

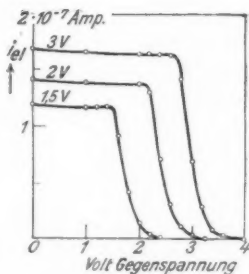
Die in der Fig. 4 gezeichneten zwei weiteren Öffnungen der Kugeln haben in diesem Zusammenhang keine Bedeutung, sie dienten bei den oben (S. 154) erwähnten Messungen der Anregungsausbeute zum Ein- und Austritt für den Atomstrahl.



Anordnung zur Prüfung
der Elektronenquellen

- | | |
|------------------|-------------|
| 1 Auffangeplatte | 3 Isolation |
| 2 Netz | 4 Kathode |

Fig. 4



Gegenspannungskurven
der Elektronenquelle
Form B

Fig. 5

Die erhaltenen Gegenspannungskurven sind für beide Elektronenquellen praktisch identisch, Fig. 5 zeigt einige, die mit Form B gewonnen wurden. Man sieht, daß der Abfall in einem Spannungsbereich von 0,6—0,8 Volt erfolgt. Von derselben Größe ist aber auch die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung, so daß die Annäherung an eine Äquipotentialkathode recht gut ist. Die Differentialkurve einer Gegenspannungskurve ist eine Geschwindigkeitsverteilungskurve¹⁾, im vorliegenden Fall hat diese ein steiles Maximum, die zugehörige Abszisse gibt die am häufigsten vertretene Geschwindigkeit. Diese Methode der Bestimmung der mittleren Elektronen-

1) J. Franck u. G. Hertz, Verh. Dtsch. Phys. Ges. 15. S. 383. 1913.

geschwindigkeit wurde in der Folge immer benutzt; Kontaktpotentiale dürften hierbei infolge guter Entgasung (vgl. S. 170) keine wesentliche Rolle gespielt haben.

Bei den endgültigen Messungen wurde die Elektronenquelle Form B benutzt.

2. Der Atomstrahlöfen

Von Leu¹⁾ ist eine Apparatur angegeben, mit der man Alkaliatomstrahlen herstellen kann. Von dem Gedanken ausgehend, daß man in einem Ofen aus Glas bessere Vakuumbedingungen erhalten müßte, habe ich aber zunächst versucht, durch Fortbildung der alten Anordnung von Dunoyer²⁾ zu einem Ofen zu gelangen, der ganz oder wenigstens zum großen Teil aus Glas besteht. Durch Verwendung dünner, in das Glas eingeschmolzener Metallblenden³⁾ gelang es auch, scharf abgegrenzte Strahlen zu erhalten. Trotzdem bin ich von dieser Methode wieder abgekommen, vor allem deshalb, weil man in einem Ofen aus Glas (schlechter Wärmeleiter), der durch einen elektrischen Ofen (Widerstandsdraht auf Asbestunterlage) von außen geheizt wird, keine gleichmäßige Temperaturverteilung erhalten kann, ohne die Entfernung von der Ofen- zur Abbildende relativ groß zu machen und damit die Strahlintensität unnötig zu schwächen. Auf eine definierte Temperatur im Dampfraum mußte aber großer Wert gelegt werden, weil aus ihr und dem zugehörigen Sättigungsdruck die aus dem Ofen verdampfende Substanzmenge berechnet werden sollte.

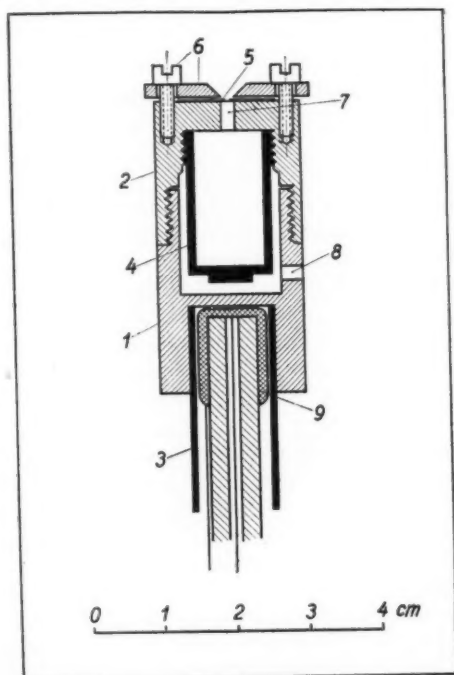
Der nach einigen konstruktiven Änderungen dem Ofen von Leu nachgebildete Metallofen ist in Fig. 6 mit allen Einzelheiten gezeichnet. Die Figur zeigt nur den Vertikalschnitt, da der Ofenkörper rotationssymmetrisch ist. Der Ofenmantel, der das Substanzgefäß in seinem Innern enthält, ist zweiteilig. In das untere Mantelstück (1) ist ein Eisenrohr (3) von 1 mm Wandstärke und insgesamt 7 cm Länge hart eingelötet, das den Ofen trägt und am anderen Ende in einem Metallschliff befestigt ist (vgl. später Ziffer 3, Gesamtaufbau). Das Substanzgefäß (4), ebenfalls aus Eisen, ist mit einem Gewinde versehen

1) A. Leu, *Ztschr. f. Phys.* **41**, S. 551. 1927.

2) L. Dunoyer, *Le Radium* **8**, S. 142. 1911.

3) K. T. Compton, *Bull. of the Nat. Research Council* Vol. **9**, Part 1, Nr. 48. 1924.

und wird in das obere Mantelstück (2) eingeschraubt; beide Teile des Ofenmantels bestehen aus Kupfer. Die Ofenblende (5) ist auswechselbar, sie besteht aus einem 0,1 mm starken Kupferblech, das eine kleine Öffnung (Nadelstich) von ungefähr



Atomstrahlofen

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1 unterer Ofenmantelteil | 6 Schrauben und Spaltbacken |
| 2 oberer Ofenmantelteil | 7 Dampfkanal |
| 3 Ofenträger (Eisenrohr) | 8 Pumpkanal |
| 4 Substanzgefäß | 9 Heizspule |
| 5 Ofenblende | |

Fig. 6

0,3 mm Durchmesser besitzt. Diese Blende wird durch je zwei Schrauben und Spaltbacken (6) aus Messing auf das obere Mantelstück aufgepreßt, ein Kanal (7) stellt die Verbindung zum Dampfraum her, die Bohrweite beträgt 2 mm. Die Bohrung (8) dient zum Auspumpen der Ofeninnenräume.

Der Ofen wird durch Strahlung geheizt durch eine Heizspule (9), die von außen in das Eisenrohr hineingeschoben wird. Die verwendete Heizspule bestand aus 1,2 m Chromnickeldraht von 0,3 mm Durchmesser, der auf ein Quarzrohr bifilar (nach Art der sogenannten Ruhstratwicklung) zur Vermeidung von Magnetfeldern aufgewickelt war. Die Wicklung bestand aus zwei Lagen, als temperaturbeständiger Kitt wurde ein dicker Brei aus Natronwasserglas und Kaolin benutzt. Der Widerstand der kalten Wicklung betrug 4,2 Ohm; bei 2,3 Amp. Heizstrom wurde eine Ofentemperatur von 350° erreicht.

Zur Messung der Ofentemperatur diente ein Thermo-element, das an das obere Mantelstück in der Nähe der Ofenblende angeschraubt wurde (vgl. die nächste Fig. 7). Das Thermoelement bestand aus Kupfer-Konstantandrähten von je 0,3 mm Stärke, es wurde geeicht am Atomstrahlofen durch Vergleich mit einem zweiten Kupfer-Konstantanelement (in Lindeckschaltung), das seinerseits bei niederen Temperaturen im Paraffinbad, bei höheren Temperaturen (bis 370°) im Salpethermostaten mit einem Normalquecksilberthermometer geeicht worden war.¹⁾

Die Substanzen (K_a und Na) wurden vor dem Einbringen in den Ofen wie folgt behandelt: Aus den von Kahlbaum bezogenen Kugeln wurden kleine Würfelchen von etwa 2 mm Kantenlänge geschnitten, die dann unter Xylol geschmolzen wurden. Sodann wurde das Substanzgefäß mit Xylol zur Hälfte gefüllt, die blankgewordenen Kügelchen eingebracht, Ofen und Apparatur zusammengesetzt und unter leichtem Erwärmen des Ofens ausgepumpt. Wenn alles Xylol abgepumpt war, begann das eigentliche Entgasen der Substanz.

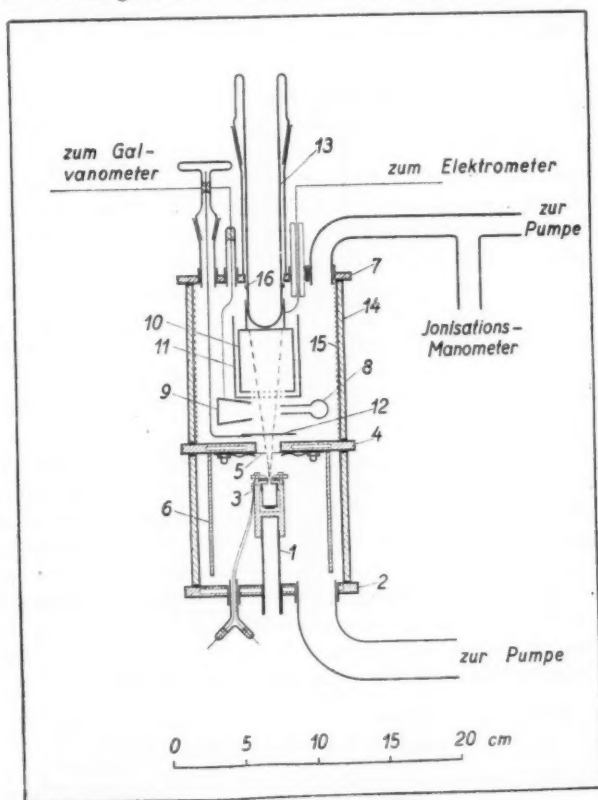
3. Der Gesamtaufbau

In Fig. 7 ist der Gesamtaufbau, zum Teil schematisch, gezeichnet. Atomstrahl-Ofen- und Laufraum sind voneinander getrennt und besitzen eigene Pumpleitungen. Vakuumtechnisch

1) Die letztgenannte Eichung wurde im Institut für Technische Physik an unserer Hochschule ausgeführt, und ich möchte nicht verfehlen, dessen Vorstand, Hrn. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Osc. Knoblauch für das freundliche Entgegenkommen, mit dem er mir diese Messung in seinem Institut gestattet hat, an dieser Stelle meinen ergebensten Dank auszusprechen.

sind beide ähnlich ausgebildet: eben abgeschliffene Glaszylinder, abgeschlossen durch ebene Metallschliffe.

Der Ofenraum. Das Eisenrohr (1), das den Ofen trägt, ist in den wassergekühlten Grundschliff (2) eingelötet. Außerdem



Gesamtaufbau

- 1 Ofenhalter
- 2 Grundschliff
- 3 Thermoelement
- 4 Mittelschliff
- 5 Abbildeblende
- 6 Kühlzylinder

- 7 Deckschliff
- 8 Elektronenquelle
- 9 Elektronenkäfig
- 10 Ionenkäfig
- 11 Schutzzyliner
- 12 Abschirmblende

- 13 Dewargefaß
- 14 Wandzylinder
- 15 Schutznetz
- 16 Schutzring

Fig. 7

enthält der Schliff die Durchführungen für das Thermoelement (3) und die Pumpleitung. Die obere Begrenzung des Ofenraums bildet der ebenfalls wassergekühlte Schliff (4), der, durch Federn angepreßt, die Abblende (5) trägt. Außerdem trägt dieser Schliff einen Kühlzylinder (6) aus 1,5 mm starkem Kupfer, durch diesen wird erreicht, daß praktisch der ganze Ofenraum wassergekühlte Wände hat, was sich als notwendig und hinreichend erwiesen hat, um Streustrahlung von reflektierten Atomen zu verhindern.

Der Laufraum. Alle hier befindlichen Teile sind an dem Deckschliff (7) befestigt, Einzelheiten der Anbringung sind in der Zeichnung unterdrückt. Es bedeutet (8) die Elektronenquelle, (9) den Elektronenauffangkäfig, (10) den Ionenkäfig, der zum elektrostatischen Schutz von dem Zylinder (11) umgeben ist. Ionenkäfig und Schutzzyylinder sind an ihrer unteren Endfläche mit einem weitmaschigen Netz aus sehr dünnem Kupferdraht versehen. (12) ist eine vermittels eines Schliffs von außen drehbare Abschirmblende für den Atomstrahl. Der Ionenkäfig wird federnd gehalten von dem Dewargefäß aus Glas (13), das unten zum mechanischen Schutz erst chemisch versilbert und dann galvanisch verkupfert ist. Zur Verhinderung von Wandladungen ist der Glaszylinder (14) innen mit einem engmaschigen Netz (15) ausgekleidet. Um ein Überkriechen von Ladungen über die Oberfläche des Dewargefäßes auf den Ionenkäfig zu verhindern, ist auf dem Glas etwa 1 cm oberhalb des Randes der Verkupferung ein enganliegender Metallring (16) angebracht, der dauernd mit dem Elektrometergehäuse verbunden bleibt, so daß die dazwischenliegende Glasoberfläche bloß gegen die Aufladespannungen ($\approx \frac{1}{50}$ Volt) zu isolieren hat. Da die Elektronenquelle nur einen geringen Heizstrom benötigt, genügt zur Kühlung des Deckschliffs ein Luftstrom, was die Befestigung der verschiedenen Teile wesentlich erleichterte. Die Durchführungen der elektrischen Leitungen waren teils mit Glas (Galvanometerleitung und Glühfadenheizung), teils mit Quarz (Elektrometerleitung) isoliert. Alle Metallteile im Laufraum bestehen aus Messing.

Die Justierung der Anordnung geschah auf optischem Wege. Es wurde hierzu alles zusammengesetzt bis auf den Deckschliff. Statt dessen wurde eine geeignet konstruierte, zum Teil durchsichtige Schablone aufgelegt, auf der die Richtung des Elek-

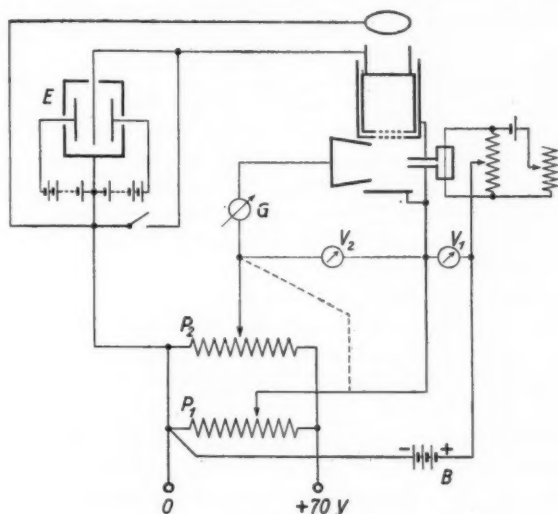
tronenstrahls sowie die Lage des Ionenkäfigs markiert waren und durch die man senkrecht von oben nach unten nach der Ofenblende visieren konnte. Durch eine seitliche Öffnung von 1 cm Durchmesser im Kühlzylinder des Ofenraums (Ziffer 6 in Fig. 7) konnte die Ofenblende von außen beleuchtet werden, so daß sie beim Durchblicken durch die Schablone gut sichtbar war. Nun wurden die verschiedenen Schlitze so lange bewegt, bis die Ofenblende in der richtigen Lage innerhalb der Abbildeblende zu sehen war, dann wurde die Schablone abgenommen und der Deckschliff in der entsprechenden Lage aufgesetzt. Die Breite des Atomstrahls gegenüber der des Elektronenstrahls war so bemessen, daß nachträgliche Verschiebungen, etwa durch kleine Bewegungen der Schlitze beim Auspumpen, nichts schaden konnten.

4. Die elektrische Schaltung

Das Schaltschema ist in Fig. 8 niedergelegt. Um den primären Elektronen den Eintritt in den Ionenkäfig zu verhüten, war die Schaltung so getroffen, daß das Feld zwischen dem Ionenkäfig und seinem Schutzzyylinder dauernd um einen konstanten Betrag (bei den meisten Messungen 4,5 Volt) größer war als die Beschleunigungsspannung der Elektronen. Diese konstante Zusatzspannung wurde der Batterie B entnommen. Durch diese Schaltung wurde gleichzeitig erreicht, daß das Elektrometergehäuse dauernd geerdet blieb. Alle sonstigen im Laufraum vorhandenen Metallteile (Abschirmblende, Mittelschliff mit Abbildeblende, Schutznetz), die in der Fig. 8 der Übersichtlichkeit halber nicht gezeichnet sind, wurden auf demselben Potential gehalten wie die den eigentlichen Stoßraum enger umgebenden Teile (Gehäuse der Elektronenquelle, Elektronenkäfig, Ionenkäfig-Schutzzyylinder), so daß die Ausbildung des Stoßraums als abgeschlossener Raum nicht notwendig war.

E ist das Elektrometer (Einfadenelektrometer von Edelmann mit elastischer Fadenbefestigung nach Wulf; Schneidenspannung ± 50 V, Empfindlichkeit auf etwa $\frac{1}{100}$ V/Skt. eingestellt), *G* das Galvanometer (Instrument von Hartmann und Braun, Empfindlichkeit $6 \cdot 10^{-10}$ A/mm bei 1 m Skalenabstand). P_1 und P_2 sind zwei Potentiometer; P_2 trat nur zur Aufnahme von Gegenspannungskurven in Tätigkeit, während

der Messungen ging die Leitung vom Galvanometer zu P_1 (punktirt gezeichnet). V_1 und V_2 sind Voltmeter (Siemens & Halske, sogenannte 10 Ohm-Instrumente mit entsprechenden Vor-schaltwiderständen). Die Batterie B ist eine Trockenbatterie.



Die elektrische Schaltung

Fig. 8

5. Pumpe, Vakuumtechnisches

Ofen- und Laufraum hatten zwar getrennte Pumpleitungen, wurden aber durch dieselbe Pumpe evakuiert. Als Pumpe diente eine dreistufige Diffusionsstahlpumpe nach Gaede. Die Pump-leitung zum Ofenraum hatte 25 mm, die zum Laufraum 15 mm lichte Weite. Die ganze Apparatur konnte von der Pumpe abgeschlossen werden durch einen Hahn von 20 mm Bohrung, zwischen Hahn und Apparatur befand sich eine weite Gasfalle.

Vakuumkontrolle. Zur Prüfung der Güte des Vakuums diente zu Beginn eines jeden Versuchs ein McLeod (um die Apparatur nach dem Zusammensetzen auf Dichtsein zu prüfen), während der ganzen Dauer der Versuche aber ein Ionisations-

manometer.¹⁾ Dies war bei geschlossenem Hahn zur Pumpe geeicht worden im Druckbereich von 10^{-2} — 10^{-4} mm Hg, wobei sich, wie zu erwarten war, als Eichkurve eine Gerade ergab, die dann bis zu Drucken von 10^{-5} mm Hg verlängert wurde, was nach Simon ohne weiteres zulässig ist. Als Röhre für das Ionisationsmanometer wurde eine gewöhnliche Verstärkerröhre älteren Typs (Telefunken EVE 173) benützt. Die Schaltung war so: Gitterkreis mit mA-Meter + 110 V, Anodenkreis mit Galvanometer einige Volt negativ gegen den Heizfaden. Der Heizstrom war so einreguliert, daß sich eine bestimmte vorher ausprobierte Emission einstellte, dann waren die Ausschläge im Galvanometer direkt proportional dem Druck. Auf solche Weise war die Handhabung außerordentlich einfach und bequem. Abgesehen davon, daß das Ionisationsmanometer den vorhandenen Totaldruck zeigt, beruht ein weiterer Vorteil gegenüber dem McLeod-Manometer darauf, daß es ohne lange Manipulationen jederzeit den eben herrschenden Momentandruck abzulesen gestattet, und daß man Druckänderungen sehr schön verfolgen kann (z. B. Gasabgabe beim Einschalten eines Glühfadens).

Schliffe, Kittungen. Alle vorhandenen Schliffe wurden mit selbst hergestelltem, besonders zähem Ramsayfett gedichtet, das durch Erhitzen im Vakuum gasfrei gemacht worden war (Dunoyer). Die angewandte Art von Planschliffen hat sich gut bewährt, die Glaszylinder hatten 4—5 mm Wandstärke, die Metallgegenschliffe (Messing) waren fein abgedreht, aber nicht poliert.

Sämtliche Kittungen wurden mit weißem Siegellack gemacht (in Fig. 7 wurden sie aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen).

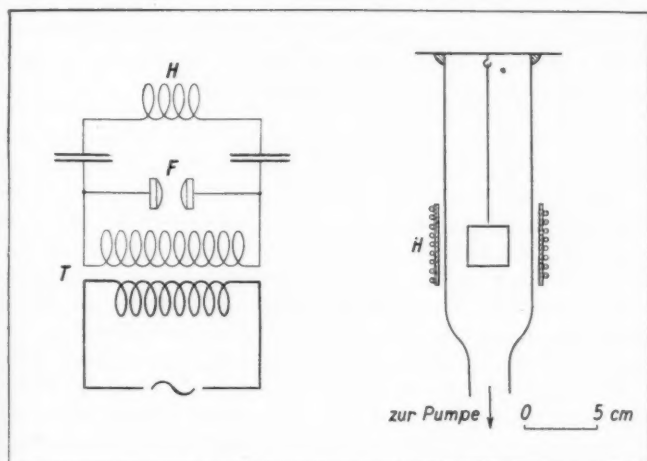
6. Wirbelstrom-Ausheizvorrichtung zur Entgasung der Elektroden

Die Apparatur konnte in zusammengesetztem Zustand wegen der Schliffe- und Kittungen nicht ausgeheizt werden; um trotzdem bestmögliche Vakuumbedingungen zu schaffen, wurde folgendermaßen verfahren: In einer gesonderten Anordnung wurden sämtliche Metallteile, die sich im Laufraum befanden, einzeln erhitzt und entgast, um dann unter Ver-

1) H. Simon, Ztschr. f. techn. Phys. 5. S. 221. 1924.

meidung jeglicher Berührung und unter Verwendung von Gummihandschuhen montiert zu werden. Es konnte hierbei die Bemerkung gemacht werden, daß gut entgaste Metalle an Außenluft, wenn vor Staub und grobem Schmutz geschützt, ihr blankes Aussehen wochenlang bewahren, ohne zu oxydieren und auch, ohne wieder viel Gas aufzunehmen.

Das Erhitzen der Metallteile im Hochvakuum geschah durch hochfrequente Wirbelströme. Die dazu notwendigen



Links: Schaltung des Hochfrequenz-
generatorkreises
T Transformator
F Funkenstrecke
H Heizspule
Rechts: Entgasungsanordnung für
Wirbelstromerhitzung

Fig. 9

Hochfrequenzströme wurden in bekannter Weise¹⁾ in einem Kondensatorkreis erzeugt, der durch einen Resonanztransformator gespeist wurde. Fig. 9 zeigt die Schaltung, die hier zu wiederholen gestattet sei. Es ist T der Resonanztransformator (von Boas, für 50 Perioden-Wechselstrom), F die Funkenstrecke und H die Heizwicklung. Fig. 9 zeigt auch die Anordnung zur Erhitzung der Metallteile im Hochvakuum. Die

1) J. Zenneck, Phys. Ztschr. 22. S. 102. 1921.

Funkenstrecke betrug 11 mm. Die Heizwicklung aus etwa 25 Windungen Hochfrequenzlitze ist auf einen Glaszylinder aufgewickelt und kann so in vertikaler Richtung leicht verschoben werden.

Die Heizwirkung der Anordnung ist beträchtlich. Ein Kupfernetz kann beispielsweise in 20—30 Sek. bis zum Schmelzen erhitzt werden, wobei primär etwa 1 kVA verbraucht wird. In dem freiwerdenden Gas entsteht eine elektrodenlose Ringentladung, deren Intensität als Maß für den erreichten Grad der Entgasung benutzt werden kann. Die Entgasung wurde jeweils erst abgebrochen, wenn bei leichtem Glühen der Metallteile keine Entladung mehr vorhanden war.

III. Gang eines Versuchs

Das Entgasen der im Ofen befindlichen Substanz wurde meist sehr lange betrieben. Gewöhnlich wurde der Ofen morgens gefüllt und die Substanz etwa 5—8 Stunden entgast, wobei die Ofentemperatur langsam auf Versuchstemperatur gesteigert wurde. Die in der Pumpleitung befindliche Gasfalle war dabei von Anfang an zur Verhinderung von Amalgambildung in der Apparatur mit flüssiger Luft gekühlt. Nach dieser Zeit wurde die Ofentemperatur etwas verringert und die Glühfadenheizung eingeschaltet. Der Faden wurde durch intermittierendes¹⁾, allmählich gesteigertes Glühen ohne angelegte Beschleunigungsspannung etwa eine Stunde lang entgast, worauf dann die Spannung angeschaltet wurde, um auch die von den Elektronen getroffenen Metallteile unter Betrieb noch etwas zu entgasen. Es mag nicht unerwähnt bleiben, daß die Elektronenquelle genau so wie alle übrigen Metallteile vor jedem Versuch in der Wirbelstromanordnung ausgeheizt wurde. Nachdem das Entgasen der Elektroden durch Unter-Betrieb-halten einige Zeit fortgesetzt worden war, wurde der Glühstrom auf das normale Maß vermindert, in welchem Zustand die Emission nunmehr gut konstant war. Hierauf wurde die Ofentemperatur wieder gesteigert und mit dem Messen begonnen. Die Meßmethode war folgende: es wurde bei einer bestimmten Beschleunigungsspannung die Aufladung des Ionenkäfigs gemessen einmal bei abgeblendetem Atomstrahl — Restgaseffekt — und

1) R. Suhrmann, Ztschr. f. techn. Phys. 4. S. 304. 1923.

dann bei durchgehendem Strahl — Ionisation von Restgas und Atomstrahl — und beide Male der zugehörige Elektronenstrom abgelesen. Die Käfigaufladung wurde bestimmt, indem für bestimmte, konstante Ausschläge im Elektrometer die Aufladzeiten gestoppt wurden. Jeder Meßwert wurde mehrmals wiederholt, häufig wurde zur Kontrolle auch mit verschiedenen Aufladungen gearbeitet, so daß sich die gestoppten Zeiten wie die Aufladespannungen verhalten mußten. Bisweilen wurde auch ein früherer Meßwert außer der Reihe wiederholt. War die Kontrolle befriedigend, so wurde zum nächsten Spannungswert übergegangen; die einzelnen Meßreihen wurden teils bei steigenden, teils bei fallenden Spannungen aufgenommen. Vereinzelt wurden einige Reihen so gemessen, daß erst alle Beobachtungen bei abgeschirmtem Atomstrahl und dann bei durchgehendem Strahl gemacht wurden, im Endergebnis gab das keinen merklichen Unterschied.

Die Beobachtung einer einzigen Meßreihe dauerte etwa $\frac{3}{4}$ —1 Stunde; nach Beendigung der Reihe wurde die Ofentemperatur etwas geändert und nach einiger Zeit die nächste Reihe begonnen. Die Güte der gemessenen Werte war eine Funktion des momentanen Entgasungszustandes, die ersten Meßreihen waren gewöhnlich wenig befriedigend und wurden im folgenden auch nie verwertet; sie dienten hauptsächlich dazu, die ganze Apparatur unter Betrieb zu halten und so dauernd zu kontrollieren. Bei den späteren brauchbaren Meßreihen zeigte das Ionisationsmanometer immer einen Restgasdruck von $1\text{--}2\cdot 10^{-5}$ mm Hg. Nach Beendigung von 5 bis 7 Meßreihen mußte der Versuch abgebrochen werden, eine Fortsetzung am nächsten Tage ergab gewöhnlich widerspruchsvolle Resultate und wurde deshalb späterhin unterlassen.

In das den Ionenkäfig tragende Dewargefäß wurde bloß vor Beginn der Messung flüssige Luft eingefüllt, um eine gute Bildung des ersten Niederschlags zu erreichen; nach einiger Zeit war die Luft wegverdampft, worauf erst mit dem Messen begonnen werden konnte. Ein Messen mit gefülltem Dewargefäß erwies sich als nicht möglich, da das Elektrometer ganz unruhig war und eine Beruhigung desselben auf keine Weise gelingen wollte. Wenn also dadurch, daß der Niederschlag nicht quantitativ ausgefroren wurde, die Möglichkeit bestand, daß bereits niedergeschlagene Atome wieder verdampften und

so einen Zusatz zum Restgas bildeten, so zeigten doch die Versuche, daß ein Einfluß in dieser Richtung nicht bestand.

Ein anderer Einfluß aber zeigte sich sehr stark, nämlich lichtelektrische Auslösung von Elektronen am Niederschlag. Doch konnte man diesen Effekt vollkommen beseitigen durch Umwickeln der ganzen Apparatur mit schwarzem Papier. Ein vom Glühdraht herrührender lichtelektrischer Effekt war nicht festzustellen; die Probe hierauf war leicht zu machen, indem man bei brennendem Faden die Beschleunigungsspannung abschaltete. Hierbei trat keine Elektrometeraufladung ein. Damit ist gleichzeitig bewiesen, daß der Atomstrahl allein ungeladen ist. Von anderer Seite ist gelegentlich die gegenteilige Beobachtung gemacht worden¹⁾, jedenfalls zeigt sich hier, daß bei einwandfreien Versuchsbedingungen — alle Metallteile auf gleichem Potential gehalten — eine meßbare Ladung im Strahl nicht auftritt. Der Bruchteil der allenfalls geladenen Atome müßte jedenfalls kleiner als 10^{-9} bis 10^{-10} sein.

Den Schluß eines jeden Versuchs bildete eine Eichung des Elektrometers, sowie die Bestimmung der Kapazität von Käfig + Elektrometer und die Aufnahme von Gegenspannungskurven im ganzen verwendeten Spannungsbereich. Die Kapazitätsbestimmung geschah mit Hilfe eines Harmsschen Kondensators von 39,9 cm Kapazität mit der Methode der Ladungsteilung. Elektrometer + Käfig wurden (durch Berühren mit dem Finger) aufgeladen und der Elektrometeraussschlag abgelesen, dann wurde der vorher geerdete Harmssche Kondensator zugeschaltet und der Rückgang des Ausschlags bestimmt. Sodann wurde der Kondensator abgeschaltet und geerdet und hierauf wieder zugeschaltet usw., bis die Kleinheit der Ausschläge ungenaue Werte ergab. Dieses Verfahren wurde mehrmals wiederholt, die Gesamtkapazität der Anordnung ergab sich dann als Mittel aus 10—15 Einzelmessungen. Die Gesamtkapazität (Elektrometer + Käfig + Zuleitungen) betrug etwa 90—100 cm.

Nach Öffnung der Apparatur wurden Ofen- und Abbildeblende ausgemessen, die (rechteckige) Abbildeblende durch Ausmessen auf der Teilmaschine, die (runde) Ofenblende durch photographische Aufnahme mit einer Mikrokamera.

1) R. Samuel, Ztschr. f. Phys. 29. S. 209. 1924.

IV. Ergebnisse

a) Leitgedanke der Auswertung der Meßergebnisse

Bei der Auswertung der Beobachtungsergebnisse sind folgende Gesichtspunkte zu beachten: Die bloße *Form der Ausbeutekurve* ist gegeben durch das Verhältnis Ionenstrom zu Elektronenstrom (i_i/i_{el}) in Abhängigkeit von der Voltgeschwindigkeit der Elektronen. Die Frage nach der *absoluten Größe der Ausbeute* kann man unterteilen, indem man erstens nach dem für eine Ionisierung wirksamen Teil des Atomquerschnitts in Quadratzentimetern, d. h. nach der Größe des Ionisierungsquerschnitts in Quadratzentimetern und zweitens nach dem Verhältnis dieses Ionisierungsquerschnitts zum gaskinetischen Querschnitt fragt.

1. Der Ionisierungsquerschnitt

Man kann sich den Zusammenstoß zwischen Elektron und Atom so vorstellen, daß man annimmt, daß ein Teil des gaskinetischen Atomquerschnitts für Elektronen frei durchlässig ist, während ein anderer Teil für einen ionisierenden Stoß verantwortlich zu machen ist. Der so definierte Ionisierungsquerschnitt eines einzelnen Atoms ist ein Bruchteil des gesamten Wirkungsquerschnitts, wie er von Ramsauer¹⁾ eingeführt und von ihm und seinen Schülern eingehend untersucht worden ist und wird.

Als direktes Versuchsergebnis erhält man die Zahl der pro Sekunde gebildeten Ionen und die Gesamtzahl der pro Sekunde durchfliegenden Elektronen, das Verhältnis dieser beiden Ströme i_i/i_{el} gibt die Anzahl der Ionen, die auf ein Elektron trifft. Wir beziehen diese Zahl auf eine Atomstrahldicke von 1 cm, es sei d die tatsächliche Dicke, so setzen wir:

$$W = \frac{\frac{i_i}{i_{el}}}{d} .$$

W ist die Wahrscheinlichkeit für ein Elektron, daß es beim Durchfliegen einer 1 cm dicken Schicht einen zu einer Ioni-

1) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 64. S. 513. 1921; 66. S. 546. 1921; 72. S. 345. 1923. — E. Brüche, Ann. d. Phys. 82. S. 25, 912. 1927; 84. S. 279. 1927. — R. Kollath, Ann. d. Phys. 87. S. 259. 1928.

sierung führenden Stoß ausführt. Mit anderen Worten ausgedrückt besagt dies, daß für jedes Elektron in einem Kubikzentimeter W cm² Fläche vorhanden sind, die für einen ionisierenden Stoß verantwortlich sind. W wäre somit zu interpretieren als die Summe der Ionisierungsquerschnitte aller in 1 cm³ vorhandenen Atome.

Alle diese Betrachtungen gelten zunächst nur für die während des Versuchs im Stoßraum herrschende Atomstrahldichte. Zum Zwecke einer besseren Übersicht und Vergleichsmöglichkeit muß man die Größe W auf einen Normalgasdruck beziehen. Seit den Versuchen von Ramsauer ist es üblich geworden, die Ergebnisse auf einen Gasdruck von 1 mm Hg und eine Temperatur von 0° C zu beziehen, und wir wollen das auch hier durchführen.

Die in einem beliebigen Augenblick in 1 cm³ an der Stelle des Stoßraums vorhandene Zahl von neutralen Atomen läßt sich aus Ofentemperatur, Sättigungsdruck und den geometrischen Abmessungen berechnen, es sei diese Zahl mit N bezeichnet. Bezeichnet man ferner mit N_0 die in einem Gas unter den Bezugsverhältnissen (1 mm Hg, 0° C) in 1 cm³ vorhandene Zahl von Atomen (N_0 ergibt sich aus der Avogadroschen Zahl zu $N_0 = 3,55 \cdot 10^{16} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3}$), so ist für die Umrechnung W zu multiplizieren mit dem Verhältnis N_0/N , um die bei 1 mm Hg-Druck und 0° C in 1 cm³ vorhandene, für einen ionisierenden Stoß wirksame Fläche F der im Atomstrahl fliegenden Atome zu erhalten:

$$F = W \frac{N_0}{N} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^3} \right].$$

Dementsprechend ist die Form der Ausbeutekurve gegeben durch die Abhängigkeit der Fläche F von der Primärgeschwindigkeit der Stoßelektronen.

2. Die prozentuale Größe der Ausbeute

Die oben angedeutete Art der Darstellung ist unabhängig von zahlenmäßigen Angaben des gaskinetischen Atomquerschnitts. Will man die absolute Größe der Ausbeute in Prozent angeben, so muß man den gaskinetischen Querschnitt kennen. Speziell im Fall der Alkalien ist aber der Atomradius experi-

mentell nicht gemessen, bekannt ist lediglich der Ionenradius. Eine Berechnung des Atomradius ist möglich aus der Formel¹⁾:

$$a = 0,663 \cdot 10^{-8} \sqrt[3]{\frac{M}{\rho}}$$

M = Molekulargewicht ρ = Dichte.

Aus diesem Wert läßt sich vermittels der Zahl N_0 die Summe aller kinetischen Querschnitte pro cm^3 berechnen, und die Ausbeute A ergibt sich als Verhältnis (Summe der Ionisierungsquerschnitte zu Summe der gaskinetischen Querschnitte) zu:

$$A = \frac{F}{N_0 \cdot \pi a^2} \cdot 100 \text{ Proz.}$$

Die hier gewählte Art der Auswertung unterscheidet sich von der v. Hippel (a. a. O.) angewandten. v. Hippel rechnet aus der Zahl der Atome im Stoßraum den äquivalenten Gasdruck aus und sodann aus den bei Quecksilber vorhandenen Werten der inneren Reibung die freie Weglänge bei diesem Gasdruck und aus dieser letzteren die Stoßzahl pro Elektron. Durch die Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung kommt hier eine Temperaturabhängigkeit der Stoßzahl herein, deren Berechtigung wohl in Zweifel gezogen werden kann, da wir eben einen Atomstrahl und kein Gas vor uns haben. In diesem Zusammenhang sei auch darauf hingewiesen, daß die Ergebnisse der beiden Berechnungsarten sehr verschieden sind. v. Hippel errechnet den theoretischen Wert für die maximale Ausbeute [aus Formel (3) S. 152] bei Hg zu 15,5 Proz. und findet nach seiner Rechnungsweise einen experimentellen Wert von 8,3 Proz. Nach der hier entwickelten Art der Auswertung ergeben sich mit denselben, in der Arbeit angegebenen experimentellen Daten 21,5 Proz.

b) Beispiel für die Ausrechnung

Der Dampfdruck im Ofen. Die Sättigungsdrucke von K und Na bei verschiedenen Temperaturen wurden einer Arbeit von Rowe²⁾ entnommen. Rowe gibt eine kritische Übersicht über die bisher gemachten Messungen und prüft mit den erhaltenen Werten, die jeweils nur einen kleinen Temperatur-

1) Handbuch der Physik von Geiger-Scheel, 22. S. 435.

2) H. Rowe, Phil. Mag. VII, 3. S. 534. 1927.

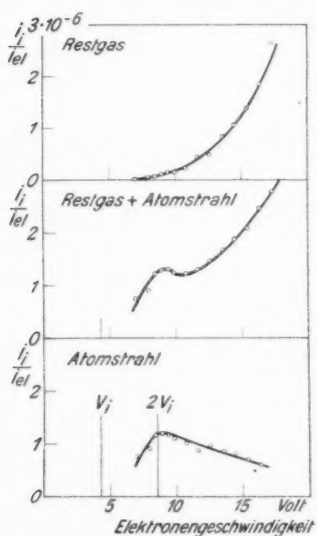
bereich umfassen, verschiedene Formeln, von denen dann eine als die wahrscheinlichste bezeichnet wird. Für K gilt [hauptsächlich nach Messungen von A. Kröner¹⁾]:

$$\log p = 7,449 - \frac{4564}{T}; \quad (p \text{ in mm Hg}).$$

Für Na ist [im wesentlichen nach Messungen von Rodebush und de Vries²⁾]

$$\log p = 12,9605 - \frac{5922}{T} - 1,6184 \log T.$$

Zahlenmäßiges Beispiel. Im folgenden ist an einem beliebigen Versuch (es ist hierzu aus der nachfolgenden Tab. 1



Gewinnung des Verhältnisses i_i/i_{el}
für den Atomstrahl
Fig. 10

daß das Maximum nur durch das Hinzutreten des Atomstrahls hervorgerufen ist und daß andererseits bei abgeschirmtem Strahl

der Versuch Nr. 5c ausgewählt) die auswertende Rechnung ausführlich durchgeführt. Die Ofenfüllung bestand bei diesem Versuch aus K. In Fig. 10 findet man das Verhältnis i_i/i_{el} graphisch aufgetragen in Abhängigkeit von der Elektronengeschwindigkeit in Volt (die aus Gegenspannungskurven bereits korrigiert ist), und zwar in der oberen Kurve für das Restgas bei heißem Ofen, aber abgeblendetem Atomstrahl und in der Mitte bei durchgehendem Strahl. Durch Subtraktion zusammengehöriger Werte erhält man i_i/i_{el} für den Strahl allein (untere Kurve). Die mittlere Kurve hat ein deutliches Maximum in der Gegend der doppelten Ionisierungsspannung ($V_i = 4,3$ V), während bei der oberen Kurve nichts davon zu sehen ist, daraus geht hervor,

1) A. Kröner, Ann. d. Phys. 40. S. 438. 1913.

2) Rodebush u. de Vries, Journ. Amer. chem. Soc. 47. S. 2488. 1925.

im Stoßraum keine Reste von K-Dampf vorhanden sind. Die untere Kurve zeigt das Maximum noch deutlicher; in dieser Kurve ist schon der ganze Verlauf der Ionisierungsfunktion enthalten.

Die nachfolgenden Rechnungen zur Bestimmung der absoluten Größe der Ausbeute ändern am Kurvencharakter nichts mehr, sondern haben für die graphische Darstellung lediglich eine andere Bezeichnung und Bezifferung der Ordinatenachse zur Folge.

Betrachten wir die Stelle des Maximums. i_i/i_{el} hat hier den Wert $1,36 \cdot 10^{-6}$ (der Ionenstrom allein betrug $1,22 \cdot 10^{-13}$ Amp.). Dieser Wert ist zu reduzieren auf eine Atomstrahldicke von 1 cm. Es war im Versuch:

Fläche der Ofenblende $f = 1,19 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$,
 Breite der Abblende $b = 0,41 \text{ cm}$,
 Entfernung Ofenblende–Abblende $= 1,8 \text{ cm}$,
 Entfernung Ofenblende–Mitte d. Stoßraums $= 4,7 \text{ cm}$,
 mittlere Breite des Strahls im Stoßraum $d = 1,07 \text{ cm}$.

Damit wird

$$W = \frac{i_i}{\frac{i_{el}}{d}} = 1,27 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^3}.$$

Die Ofentemperatur war $T = 256^\circ \text{ C} = 529^\circ \text{ abs.}$, der zugehörige Sättigungsdruck berechnet sich zu:

$$p = 6,6 \cdot 10^{-2} \text{ mm Hg},$$

die zugehörige mittlere kinetische Geschwindigkeit berechnet sich nach Stern¹⁾ zu:

$$v = 6,70 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

die aus dem Ofen verdampfende Menge ist²⁾

$$q = \frac{5,83 \cdot 10^{-2} \cdot p \cdot f}{\sqrt{MT}} = 3,20 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Mol}}{\text{sec}}$$

und die Intensität in 4,7 cm Abstand vom Ofen wird

$$J = \frac{q}{\pi \cdot 4,7^2} = 4,60 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Mol}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} = 2,78 \cdot 10^{14} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}.$$

1) O. Stern, Ztschr. f. Phys. **2**. S. 49. 1920; **3**. S. 417. 1920.

2) O. Stern, Ztschr. f. Phys. **39**. S. 751. 1926.

Daraus berechnet sich die Anzahl der gleichzeitig in 1 cm^3 vorhandenen Atome zu

$$N = \frac{J}{v} = 4,17 \cdot 10^9 \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3}$$

und die unter den Bezugsverhältnissen (0° C , Druck von 1 mm Hg) in 1 cm^3 vorhandene Fläche F zu

$$F = W \frac{N_0}{N} = 10,8 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^3}.$$

Aus der S. 175 angegebenen Formel ergibt sich für das K-Atom ein gaskinetischer Radius von

$$a_K = 2,35 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

und damit die Gesamtsumme der unter den Bezugsverhältnissen in 1 cm^3 vorhandenen Atomquerschnitte zu

$$N_0 \cdot \pi a_K^2 = 61,8 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^3}.$$

Mit diesen Zahlenwerten erhält man eine maximale Ausbeute von

$$A = 17,5 \text{ Proz.}$$

In dieser Weise sind sämtliche Versuchsergebnisse ausgewertet; eine Zusammenstellung der Resultate findet sich im nächsten Abschnitt.

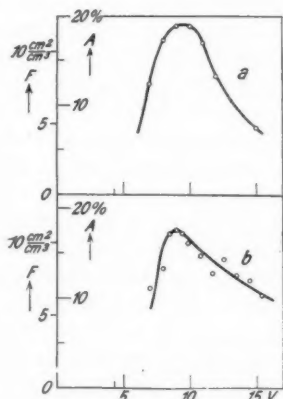
c) Zusammenstellung und Besprechung der Ergebnisse

Die folgende Tab. 1 enthält eine Zusammenstellung der Ergebnisse. Es sind bei weitem nicht alle Versuche mit auf-

Tabelle 1

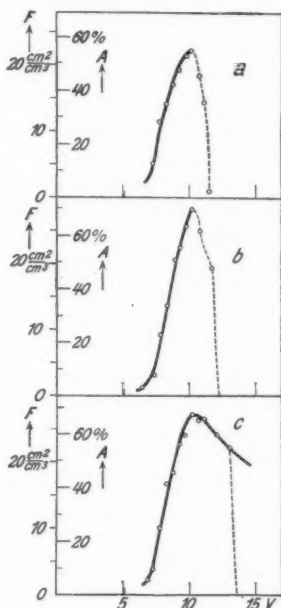
Ver- such Nr.	Sub- stanz	Ofen- temp. 0° C	Sätti- gungs- druck mm Hg	Max.Ion.- Quer- schnitt b. 1 mm Hg , 0° C cm^2/cm^3	Max. Aus- beute $\%$	Bemerkungen
4	K	206	0,0084	<21	<34	} Restgasionisation nicht abgezogen
1	K	220	0,0165	<44	<70	
5a	K	249	0,051	12	20	—
5b	K	249	0,051	8	14	—
5c	K	256	0,066	10,8	17,5	Kurve b in Fig. 11
7	K	277	0,143	11,7	19	Kurve a in Fig. 11
2	K	294	0,257	<30	<50	Restgasionisation nicht abgezogen
6	K	317	0,49	2,5	3,5	—
3	K	325,5	0,70	0,7	1	—
8a	Na	343,5	0,069	22	55	Kurve a in Fig. 12
8b	Na	350,0	0,084	29	72	Kurve b in Fig. 12
8c	Na	358,5	0,111	28,3	70	Kurve c in Fig. 12

genommen, sondern von jedem Versuch nur die, nach den allgemeinen Versuchsbedingungen zu urteilen, als die besten erscheinenden Meßreihen verwertet. Andererseits sind aber auch einige der Versuche berücksichtigt, die bloß orientierenden Charakter hatten, bei denen die Ionisation des Restgases nicht



Ionisierungsfunktion von K
 $V_i = 4,3 \text{ V}$

Fig. 11



Ionisierungsfunktion von Na
 $V_i = 5,1 \text{ V}$

Fig. 12

(Die Ionisierungsspannung ist jeweils durch einen kleinen Strich auf der Abszisse angedeutet)

gesondert gemessen wurde und deshalb nicht in Abzug gebracht werden konnte. Die gewählten Beispiele sind also gewissermaßen als Typen zu betrachten. Die Werte sind nach steigenden Ofentemperaturen geordnet.

Die gaskinetische Querschnittssumme beträgt bei K 61,8 und bei Na 40,3 cm^2/cm^3 . Die beiden vorstehenden Figuren enthalten einige Ionisierungsfunktionskurven.

Vor der Besprechung der Ergebnisse ist eine Besprechung der Fehlerquellen notwendig.

Besprechung der Fehlerquellen. Die Messungen sind im allgemeinen im Spannungsbereich von 5–20 V Elektronengeschwindigkeit gemacht. Die erhaltenen Werte für Geschwindigkeiten über etwa 14–16 V sind aber überall weggelassen, da sich hier eine Störung bemerkbar machte, die zu beseitigen nicht gelungen ist. Betrachten wir beispielsweise die Kurve c in Fig. 12. Die Meßwerte sind gewonnen bei steigenden Spannungen; jeder Wert für die Aufladung des Elektrometers wurde 3–4mal hintereinander beobachtet, wobei die größten Schwankungen nicht mehr wie einige Prozent betrugen. Beim Übergang von 13,1 V zu der nächsthöheren Spannung 14,0 V wird plötzlich die Differenz (Atomstrahl + Restvakuum – Restvakuum) negativ. Der sich ergebende Wert für F wäre $-19 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$. Der Umschlag tritt sehr plötzlich auf, die Kurve hat an der fraglichen Stelle einen Knick. Der Effekt ist nun aber für sich keineswegs konstant, sondern abhängig von der Güte des Restvakuums und von der Art der im Ofen befindlichen Substanz. Je besser das Vakuum, bei desto höheren Spannungen erst tritt der Umschlag ein, desto plötzlicher wird er auch. Man vergleiche die drei Kurven a, b, c. Bei a erfolgt der Durchgang durch die Abszisse bei 11,6 V, bei b (eine Stunde später gewonnen) bei 12,2 V, und bei c (nach weiteren vier Stunden) bei 13,7 V. Beim Übergang von a zu b wird das Maximum gleichzeitig größer; dies ist offenbar dadurch zu erklären, daß bei a der störende Effekt sich bereits bei Spannungen von der Größe der doppelten Ionisierungsspannung ($V_i = 5,1 \text{ V}$) bemerkbar macht und die Höhe der Maximums vermindert. Bei dieser Kurve sieht man auch keinen Knick. Bei b und c aber ist ein Knick vorhanden und die Maxima sind gleich hoch, so daß man annehmen kann, daß der Effekt an der Stelle des Maximums nicht in merkbarer Größe vorhanden war.

Eine Beseitigung des Effekts gelang, wie gesagt, nicht. Es wurde festgestellt, daß die Größe der Zusatzspannung der Batterie B (Fig. 8) keinen Einfluß auf die Störung hat, daß sie aber auch vorhanden war, wenn der Ofen kalt war. Sie kann also jedenfalls nicht unmittelbar zum Atomstrahl gehören. Wenn bei kaltem Ofen die Abschirmblende hin und her gedreht wurde, so hätten die i_i/i_{el} -Kurven identisch sein müssen.

Dies war auch der Fall bei niederen Spannungen, aber oberhalb einer bestimmten Spannung tritt die Störung ein: die Aufladung des Elektrometers erfolgt bei der einen Stellung der Abschirmfläche langsamer als in der andern. Dies gibt einen Hinweis auf die vermutliche Ursache der Störung: im kritischen Spannungsbereich müssen durch die Bewegung der Blende Änderungen des elektrostatischen Feldes im Stoßraum erfolgen. Wahrscheinlich spielt hierbei die Gasbeladung der Metallteile eine Rolle, denn anders ist die Wirkung der Güte des Restvakuums nicht zu erklären. Da bei fortschreitender Entgasung die Erscheinung zu immer größeren Spannungen rückt und sich in den Kurven als Knick zeigt, ist die Annahme berechtigt, daß ihr Einfluß unterhalb des Knickes unmerklich ist. Die negative Differenz bleibt von ungefähr derselben Größe bis zu Spannungen von 30—50 V. Bei K als Ofenfüllung trat der Effekt immer bei etwas höheren Spannungen ein, nämlich bei ungefähr 16—19 V. Immer gerade bei den Kurven, die, nach der Güte des Vakuums zu schließen, die besten hätten sein sollen, und bei denen die Meßpunkte am wenigsten streuen, trat der Umschlag durch einen Knick in Erscheinung.

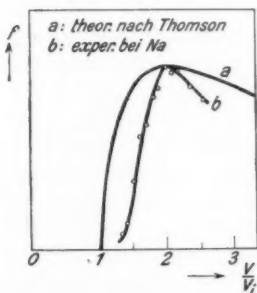
Wird durch diese Fehlerquelle die Kurvenform beim Abfall nach größeren Spannungen hin unsicher, so ist noch eine zweite Erscheinung zu beachten, die die absolute Höhe aller Ordinaten gleichmäßig vermindern kann. Dieser Fall tritt ein, wenn der Dampfdruck im Ofen infolge zu hoher Ofentemperatur zu groß wird, so daß die mittlere freie Weglänge der Atome vergleichbar wird mit den Dimensionen der Ofenblende. Dann erfolgt die Ausströmung nicht mehr molekular, wie oben vorausgesetzt wurde. Da die Ausströmung gestört ist, strömt weniger aus, als nach den Formeln berechnet wurde, die errechnete Ausbeute ist also zu klein. Dies ist beispielsweise der Fall bei den Versuchen Nr. 3 und 6. (Um solchen Zwischenfällen zu entgehen, wäre es für eine Wiederholung oder Fortsetzung der Versuche angebracht, die aus dem Ofen verdampfende Menge überhaupt nicht zu berechnen, sondern experimentell zu bestimmen, etwa mit einer Anordnung, wie sie in allerjüngster Zeit von Taylor¹⁾ im Sternschen Institut entwickelt worden ist.)

1) J. B. Taylor, *Ztschr. f. Phys.* **57**, S. 242. 1929. Das Prinzip der verwendeten Methode geht auf Langmuir zurück; man bringt einen glühenden Wolframdraht in den Weg des Atomstrahls. Jedes Atom, das

Besprechung der Ergebnisse. Eine vergleichende Betrachtung der bei K erhaltenen Ergebnisse ergibt folgendes. Die Versuche, bei denen die Ionisierung des Restgases nicht gesondert gemessen wurde, ergeben alle eine Kurve von der Form der mittleren Kurve in Fig. 10. Berechnet man die Ausbeute an der Stelle des Maximums, so erhält man zu hohe Werte, die Größe des Wertes ist abhängig von der Güte des augenblicklich erreichten Entgasungszustandes. Die Versuchsreihen, bei denen die Ionisierung des Restvakuums in Abzug gebracht werden konnte, sind in zwei Kategorien zu teilen: die eine ergibt eine maximale Ausbeute von 15–20 Proz., während die andere beträchtlich kleinere Werte ergibt.

Diese kleinen Werte lassen sich, wie oben besprochen, ungezwungen durch eine zu hohe Ofentemperatur erklären. Der wahrscheinlichste Ausbeutewert bleibt also ≈ 20 Proz.

Vergleicht man die besten Ionisierungsfunktionskurven von K und Na (Fig. 11b bzw. Fig. 12c), so ist folgendes zu sagen. Beide Kurvenformen sind sehr ähnlich. Der Anstieg von kleinen Spannungen zum Maximum erfolgt, wie man insbesondere bei der Na-Kurve sehen kann, nicht linear. Eine merkliche Ausbeute tritt erst oberhalb 1–2 V über der Ionisierungsspannung auf.



Vergleich der experimentellen mit der theoretischen Ionisierungsfunktion

Fig. 13

Ein Vergleich der experimentell gefundenen Kurvenform mit der nach Thomson berechneten ergibt schließlich folgendes Resultat (Fig. 13, die Ordinaten in dieser Figur sind willkürlich, die theoretische Kurve ist so gezeichnet, daß ihr Maximum die gleiche Höhe hat wie die experimentelle Kurve). Man sieht, daß sowohl Abfall wie Anstieg bei der experimentellen Kurve rascher erfolgen, daß aber das Maximum an der gleichen Stelle liegt. Daß die Übereinstimmung vollkommen ist, kann nicht erwartet werden, da die Thomsonsche Theorie mit

auf den Draht trifft, wird in ein Ion verwandelt. Mißt man den gebildeten Ionenstrom, so hat man ein Maß für die Intensität des Atomstrahls an der Stelle des Fadens.

den einfachsten Annahmen arbeitet und die Elektronenbindung ganz vernachlässigt. Oberhalb des Maximums ist infolge der oben beschriebenen Störung die Abweichung etwas unsicher. Viel sicherer ist jedenfalls der abweichende Kurvenverlauf unterhalb des Maximums. Insbesondere scheint sicher, daß die Einmündung in die Abszisse nicht steil, wie bei Thomson, erfolgt, sondern mehr asymptotisch.

Der theoretische Maximalwert ist für Na eine Ausbeute von 54 Proz. und für K von 50 Proz. Experimentell ergibt sich qualitativ dasselbe Verhältnis, indem die Ausbeute bei Na größer ist als bei K. Es ergeben sich 70 bzw. 20 Proz. Allerdings muß gesagt werden, daß die vorliegenden Messungen infolge einiger Störungen keine übertriebene Genauigkeit beanspruchen dürfen, andererseits weichen die Werte des maximalen Ionisierungsquerschnitts aus verschiedenen Versuchen auch nicht allzusehr voneinander ab. Es erscheint jedenfalls gesichert, daß die Differenz der experimentellen Ausbeutewerte für Na und K wesentlich größer ist als die theoretisch berechnete.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage der Ionisierungsausbeute bei Ionisierung durch Stoß langsamer Elektronen. Es wird eine Apparatur angegeben, mit der die Ausbeute quantitativ bestimmt werden kann. Die untersuchten Substanzen (K und Na) werden in Form eines Atomstrahls verwendet. Es wird ein Elektronenstrahl von annähernd homogener Geschwindigkeit unter einem rechten Winkel durch den Atomstrahl geschickt und sowohl der primäre Elektronenstrom wie der gebildete Ionenstrom gemessen. Aus diesen Größen und den weiteren experimentellen Daten kann man die Ausbeute berechnen. Die Ausbeute ergibt sich hierbei einerseits als Ionisierungsquerschnitt in cm^2/cm^3 (in Anlehnung an den Ramsauerschen Wirkungsquerschnitt) und andererseits durch Vergleich mit dem gaskinetischen Querschnitt als prozentuale Ausbeute.

Die Versuche ergeben ein Maximum des Ionisierungsquerschnittes in der Nähe der doppelten Ionisierungsspannung mit den Zahlenwerten $29 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$ für Na und $11 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$ für K. Die Theorie der Ionisierung durch Elektronenstoß von J. J. Thomson sagt ein Maximum der Ausbeute voraus für

eine Elektronengeschwindigkeit von der Größe der doppelten Ionisierungsspannung mit einem Maximalwert der Ausbeute von 54 Proz. für Na und 50 Proz. für K. Die Versuche ergeben Übereinstimmung mit der Theorie, was die Lage des Maximums anbelangt, ebenso in bezug auf die relative Größe der Werte für Na und K. Der Unterschied der Werte für Na und K ergibt sich aber wesentlich größer (70 bzw. 20 Proz.). Weiterhin ergeben die Versuche eine andere Art des Anstiegs der Ausbeute von der Ionisierungsspannung bis zum Maximum.

Die vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Technischen Hochschule München ausgeführt. Ich fühle mich Hrn. Geheimrat Prof. Dr. J. Zenneck für die stets entgegenkommende Überlassung und Bereitstellung aller benötigten Hilfsmittel und sein wohlwollendes, förderndes Interesse zu tiefstem Dank verpflichtet. Ebenso möchte ich Hrn. Priv.-Doz. Dr. H. Kulenkampff und Hrn. Dr. V. v. Keußler meinen wärmsten Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und für die mir sehr wertvolle Beratung und Förderung während des Verlaufs der Untersuchung.

Von den gebrauchten Hilfsmitteln rühren verschiedene von der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft und dem Bund der Freunde der Technischen Hochschule München her; für deren Überlassung möchte ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank sagen.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Oktober 1929.

(Eingegangen 5. Dezember 1929)

Ein Verfahren zur Messung von Brechungsexponenten für Röntgenstrahlen¹⁾

Von Karl Kellermann

(Mit 13 Figuren)

Inhalt: Einleitung. — I. Beschreibung des Verfahrens: 1. Verwendung von Zylinderflächen; 2. Herleitung der Formeln; 3. Verwendung von Zylindersegmenten geringer Krümmung. — II. Anwendung des Verfahrens: 1. Röntgenanlage; 2. Krümmung der Substanzplatte; 3. Justierung; 4. Messungen an festen Stoffen (Kronglas und Silber); 5. Messungen an Flüssigkeiten (Glyzerin und Chlorecalciumlösung). — III. Schlußbetrachtung und Zusammenfassung.

Einleitung

Nachdem durch die Interferenzversuche von v. Laue, Friedrich und Knipping die Wellennatur der Röntgenstrahlen nachgewiesen war, war theoretisch die Möglichkeit eines Brechungsexponenten gegeben. Im Jahre 1919 gelang es W. Stenström²⁾, Abweichungen vom Bragg'schen Gesetz festzustellen, die nach den theoretischen Untersuchungen von C. G. Darwin³⁾ bei Vorhandensein einer Brechung der Röntgenstrahlen zu erwarten waren. Dieser Weg zur Bestimmung des Brechungsexponenten für Röntgenstrahlen erfuhr eine Verbesserung durch Bergen Davis und C. G. Hatley⁴⁾, die durch Anschleifen der Kristalle unter einem kleinen Winkel gegen die Netzebenen eine leichtere Ausmeßmöglichkeit für die Abweichungen vom Bragg'schen Gesetz erreichten. 1922 be-

1) Gekürzte Frankfurter Dissertation, vorgetragen in der Sitzung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Gauverein Hessen, am 22. Juni 1929, vgl. Verhandl. (3) **10**. S. 25—26. Nr. 2. 1929.

2) W. Stenström, Dissertation, Lund, 1919.

3) C. G. Darwin, Phil. Mag. (6) **27**. S. 318. 1914.

4) B. Davis u. C. G. Hatley, Phys. Rev. (2) **23**. S. 290. 1924.

nutzte A. H. Compton¹⁾ erstmalig die Totalreflexion von Röntgenstrahlen zur Bestimmung des Brechungsexponenten. Da der Brechungsexponent sich < 1 ergibt, so erleiden Röntgenstrahlen in Luft beim Auffallen auf die Oberfläche von festen Körpern und Flüssigkeiten unter genügend flachen Winkeln Totalreflexion; der Grenzwinkel der Totalreflexion ergibt in einfacher Weise den Brechungsexponenten. Von Compton wurden die zur Feststellung der Grenze der Totalreflexion erforderlichen Auftreffwinkel durch Drehen einer ebenen Substanzplatte erzeugt. W. Linnik und L. Lashkarew²⁾ bestimmten 1926 [1929 verbessert³⁾] ebenfalls mit Hilfe der Totalreflexion den Brechungsexponenten für Röntgenstrahlen von ebenen Substanzplatten. Zur Erzielung der verschiedenen Auftreffwinkel arbeiteten sie mit divergenten Strahlen und benutzten ferner eine schneidenförmige Blende, die der Substanzplatte in bestimmter Weise gegenübergestellt wurde. 1929 gelang es W. Ehrenberg und F. Jentzsch⁴⁾, Brechungsexponenten für Röntgenstrahlen aus dem Abfall des Photostromes bei dem Grenzwinkel der Totalreflexion zu bestimmen.

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, seien in der folgenden Tabelle einige der bisher erhaltenen Werte für den Grenzwinkel α der Totalreflexion, der als Glanzwinkel zwischen auffallendem Strahl und Tangentialebene der Platte gemessen wird, und für $\delta = 1 - \mu$ angeführt⁵⁾, wobei μ den Brechungsexponenten bezeichnet. Gemäß der Beziehung

$$\mu = \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

wird

$$(1) \quad \delta = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha.$$

1) A. H. Compton, Phys. Rev. (2) **20**. S. 84. 1922; Phil. Mag. (6) **45**. S. 1121. 1923.

2) W. Linnik u. L. Lashkarew, Ztschr. f. Phys. **38**. S. 659 bis 671. 1926.

3) W. Linnik u. S. D. Hertzrücken, Ztschr. f. Phys. **52**. S. 739 bis 742. 1929.

4) W. Ehrenberg u. F. Jentzsch, Ztschr. f. Phys. **54**. S. 227—235. 1929.

5) Die nichteingeklammerten Werte sind den Originalarbeiten entnommen, die eingeklammerten Werte zur Ergänzung von mir berechnet worden. Vgl. hierzu den während des Druckes erschienenen Bd. XXIV, 2 des Handbuches der Experimentalphysik, Röntgenspektroskopie, insbesondere Kap. IV, § 2—4.

Die jeweils bei der Messung benutzte Röntgenstrahlung ist nach Art und Wellenlänge angeführt.

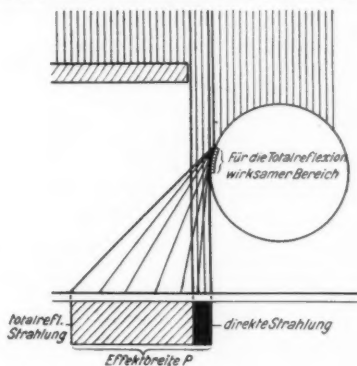
Die in der umseitigen Tabelle in der Spalte „Methode“ angegebenen Ziffern bezeichnen folgende Verfahren:

- Methode I. Abweichung vom Braggschen Gesetz.
 „ II. Totalreflexion an gedrehter ebener Platte.
 „ III. Totalreflexion an ruhender ebener Platte bei divergentem Strahlenbündel.
 „ IV. Abfall des Photostromes bei dem Grenzwinkel der Totalreflexion.

I. Beschreibung des Verfahrens

1. Verwendung von Zylinderflächen

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur Bestimmung des Brechungsexponenten für Röntgenstrahlen ausgebildet, welches die Totalreflexion an festen und flüssigen



Idealfall

Fig. 1

Oberflächen benutzt; dabei wird die Änderung des Auftreffwinkels durch Krümmung der Substanzplatte erreicht.

Die bei diesem Verfahren anzustrebenden idealen Verhältnisse sind folgende:

Ein optisch und geometrisch homogenes (d. h. monochromatisches und nur aus parallelen Strahlen bestehendes) Bündel von Röntgenstrahlen, welches auf einer Seite durch eine gerade Blende (Halbebene) begrenzt wird, trifft das zylinderförmige Versuchsmaterial bzw. ein Zylindersegment (Fig. 1).

Tabelle

Jahr	Name	Methode	Substanz	Strahlung	λ ÅE	$\delta \cdot 10^6$	Wert	α
1920	Duane u. Patterson Phys. Rev. (2) 16, S. 532	I	Kalkspat	$W_{L\alpha_1}$ $W_{L\beta_1}$	1,473 1,279	8 ¹ 10 ¹	(14') (15')	
1923	A. H. Compton Phil. Mag. (6) 45, S. 1129	II	Glas Silber	$W_{L\gamma_1}$ $W_{L\beta_1}$	1,095 1,279	3 ¹ 4,2	(8') 10'	
1924	C. G. Hatley u. B. Davis Phys. Rev. (2) 23, S. 290	I	Kalkspat	$W_{L\beta_1}$ $Mo_{K\alpha}$	1,279 0,708	21,5 2	22,5' (7')	
1924	R. v. Nardroff Phys. Rev. (2) 24, S. 143	I	Eisenpyrit	$Mo_{K\alpha_1}$ $Mo_{K\beta_1}$ $Mo_{K\alpha_1}$ $Mo_{K\beta_1}$	0,708 0,631 0,708 0,631	4,6 3,9 3,35 2,87	(10,4') (9,6') (8,9') (8,2')	
1924	C. G. Hatley Phys. Rev. (2) 24, S. 486	I	Kalkspat	$Cu_{K\alpha_1}$ $Cu_{K\beta_1}$ $Mo_{K\alpha}$	1,537 1,389 0,708	17,6 13,2 2,21 1,94 2,03	(20,4') (17,7') (7,2') (6,8') (6,9')	
1925	A. Larsson Ztschr. f. Phys. 35 S. 401	I	Glimmer	$Cu_{K\alpha_1}$ $Va_{K\alpha_1}$ $Sn_{L\beta_1}$ $K_{K\beta_1}$ $Mo_{L\beta_1}$ $Si_{K\alpha}$ $Al_{K\alpha}$	1,537 2,498 3,377 3,447 5,165 7,109 8,319	9,35 26,4 49,2 51,4 106,5 186,2 249	(14,9') (25') (34,1') (34,9') (50,2') (1° 6,3') (1° 16,7')	

1926	E. Hjalmar Ann. d. Phys. (4) 79, S. 550	I	Gips	CuK α_1	1,537	9,22 8,84 9,00 9,28 15,1 15,3 15,7 23,1 27,7 27,3	(14,8') (14,5') (14,6') (14,8') (18,9') (19') (19,3') (23,4') (25,6') (25,4')
				FeK α_1	1,932		
				VaK α_1	2,498		
				ScK α_1	3,025		
				SnL α_1	3,592		
1926	W. Ehrenberg u. H. Mark Ztschr. f. Phys. 38, S. 129	Spektrum bei div. Strahlen	Zinkblende	AgL β_1	3,926	60,4	(37,8')
				ClK α_1	4,718	74,9	(42')
				MoL β_1	5,165	82,6	(44,2')
				WL β_1	1,484	9,5	(15')
				WL α_2	1,473	9,3	(14,8')
				WL β_1	1,279	5,0	(10,9')
				WL β_2	1,241	6,0	(11,9')
				WL β_3	1,241	6,2	(12,1')
				CuK α_1	1,537	13,7 7,6 7,14 8,85 8,48	18' 13,4' 13' 14,5' 14,2'
						1,91 1,81	(6,7') (6,6')
1927	A. Larsson Ztschr. f. Phys. 41, S. 507	I	Kalkspat	MoK α_1	0,708		
				FeK α_1	1,932	14,6	(18,6)

1) Die drei ersten Werte sind von A. H. Compton in Phil. Mag. (6) 45. S. 1122. 1923 berechnet.

Tabelle (Fortsetzung)

Jahr	Name	Methode	Substanz	Strahlung	λ AE	$\delta \cdot 10^6$	Wert α
1928 ¹⁾	J. A. Prins Ztschr. f. Phys. 47, S. 479—498	II	Stahl	spektral zerlegte kontinuierliche Strahlung	1,538	6,1—6,78	(12')—(12,7')
					1,656	7,21	(13')
					1,675	4,88	(10,8')
					1,739	5,8	(11,7')
					1,740	6,2	(12,1')
					1,741	6,45	(12,4')
					1,745	7,05	(12,9')
					1,753	7,08—7,21	(13')
					1,787	7,48	(13,3')
					1,844	7,73	(13,5')
1929	W. Ehrenberg u. F. Jenitzsch Ztschr. f. Phys. 54, S. 227—235	IV	Stahl	$\text{Cu}_{K\alpha}$ $\text{Mo}_{K\alpha}$	1,934	8,20	(14')
					1,537	(24,37)	24,0'
			Silber	$\text{Cu}_{K\alpha}$ $\text{Mo}_{K\alpha}$	0,708	(6,62)	12,5'
					1,537	(29,7)	26,5'
			Gold	$\text{Mo}_{K\alpha}$ $\text{Mo}_{K\alpha}$	0,708	(9,52)	15,0'
					0,708	(8,88)	14,5'

1) Vgl. ferner die ausführlichen Messungen bei R. Forster, Helv. Phys. Acta 1. S. 18. 1928.

Dabei sei die Zylinderachse senkrecht zur Strahlrichtung und parallel zur Blendengrenze angeordnet und der Zylinder so nahe an die Begrenzung der Strahlen herangerückt, daß nur noch eine schmale direkte Strahlung frei vorbeigehen kann. Diese wird auf einer Platte senkrecht zum Strahlengang eine streifenförmige *direkte* Schwärzung erzeugen.

Längs eines gewissen Teiles der Zylinderfläche (in Fig. 1 schraffiert) treffen dann die Strahlen unter einem Winkel \leq dem Grenzwinkel α der Totalreflexion auf. Diese Strahlen erleiden an der Zylinderoberfläche Totalreflexion und bilden einen Fächer von totalreflektierter Strahlung, der auf der einen Seite durch die den Zylinder tangierenden Strahlen, auf der anderen Seite durch die Grenzstrahlen der Totalreflexion begrenzt wird. Die Breite dieses Fächers auf der photographischen Platte (d. h. der Abstand des Grenzwinkelstrahles vom tangierenden Strahl) sei als *Effektbreite* p bezeichnet.

Die wirklichen Verhältnisse weichen von dem idealen Fall in verschiedener Hinsicht ab:

Wenn wir die Strahlenquelle (Brennfleck) zunächst noch als punktförmig annehmen, so werden die Strahlen wegen der endlichen Entfernung der Quelle eine Divergenz aufweisen; der Winkelunterschied ist jedoch für den schmalen Bereich der zur Totalreflexion kommenden Strahlen außerordentlich klein; er war beispielsweise bei den folgenden Versuchen $< 5''$.¹⁾

Eine weitere Abweichung ergibt sich dadurch, daß der Brennfleck nicht punktförmig ist. Die Abweichung, die ein ausgedehnter Brennfleck bewirkt, läßt sich am einfachsten gemäß der schematischen Fig. 2 beurteilen: Für die äußersten Punkte des Brennflecks in der Bildebene sei die Konstruktion wie beim Idealfall von Fig. 1 durchgeführt. Man erhält dann zwei Effektbreiten p und p' und erkennt daraus, daß das von einem ausgedehntem Brennfleck herrührende Photogramm um denjenigen Winkelbereich verwaschen ist, unter dem der Brennfleck von

1) Der Divergenzwinkel τ des zur Totalreflexion gelangenden Strahlenbündels ergibt sich aus: $\tau = \frac{r \alpha^2}{2 a}$; man erhält für r (Krümmungsradius) = 250 cm, α = Grenzwinkel der Totalreflexion $\sim 10'$ und a = Abstand Drehachse — Antikathode = 47 cm, $\tau \approx 5''$.

der Stelle der Totalreflexion aus erscheint. Bei den Messungen dieser Arbeit fand eine Mediaröhre der Firma C. H. F. Müller-Hamburg mit Goetze-Strichfokus Verwendung, bei der Strah-

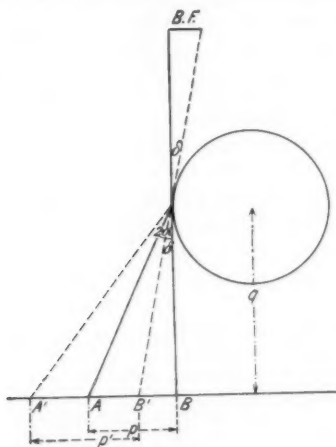


Fig. 2

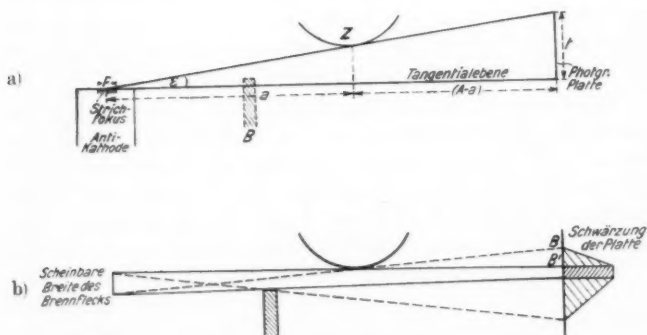


Fig. 3

Einfluß der Ausdehnung des Brennflecks

lung unter sehr flachem Winkel zur Antikathodenfläche benutzt wird. Könnte man bis an die Tangentialebene der Antikathode selbst herangehen, so würde der Brennfleck (seine Projektion)

unendlich schmal erscheinen.¹⁾ Durch einen Vorversuch²⁾ wurde festgestellt, daß bereits unter einem kleinen Winkel ε von $\sim 5,3'$ gegen die Ebene der Antikathode volle Strahlungsintensität erreicht wird. Die scheinbare Breite des Brennfleckes bedingt bei den vorliegenden Abmessungen eine Unschärfe im Winkelbetrage von $\eta \approx 7''$. Dieser Fehler ließ sich jedoch bei der Ausmessung der Photogramme weitgehend eliminieren, indem als Grenze der Effektbreite auf seiten der tangierenden Strahlen nicht der Beginn der Schwärzung (B in Fig. 3b), sondern die Stelle maximaler Schwärzung (B' in Fig. 3b) eingestellt und bis zum Bande der Schwärzung auf seiten der totalreflektierten Strahlen gemessen wurde (vgl. auch Fig. 2).

2. Herleitung der Formeln

Auf Grund der idealen Verhältnisse, wie sie in Fig. 1 vorliegen, ergeben sich nach Fig. 4 folgende Beziehungen:

Gesucht ist der Grenzwinkel der Totalreflexion als Funktion der geometrischen Abmessungen: der Effektbreite p , des Plattenabstandes q von der Zylinderachse und des Krümmungsradius r des Zylinders.

1) Vgl. auch: R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, Springer 1927. S. 6. Anm. 1.

2) Es wurde gemäß Fig. 3a eine Aufnahme der Strahlung ohne jede Abblendung gemacht und festgestellt, daß bei einer Plattenentfernung A in einem Abstände t von den äußersten Strahlen in der Tangentialebene die Schwärzung einen gleichmäßig starken Wert aufwies. Bei den späteren Justierungen wurde die Zylinderfläche Z nur so weit vorgeschoben, daß sie eben noch in dem Bereich der gleichmäßig kräftigen Strahlung lag. Zur Erzielung einer scharfen Begrenzung der direkten Strahlung wurde die Blende B gemäß Fig. 3a eingerückt. Unter diesen Verhältnissen ergibt sich eine scheinbare Breite F' für den Strichfokus F von $F' = F \cdot \sin \varepsilon \approx F \cdot \varepsilon$, wobei $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{t}{A}$ ist. Bei den Messungen befand sich die Zylinderfläche im Abstände a von dem Brennfleck und demgemäß bedingt die scheinbare Breite F' einen Fehlerwinkel

$$\eta = \frac{F' \cdot t}{a \cdot A}.$$

Für vorliegende Versuche war:

$$F \approx 1 \text{ cm}, t = 0,1 \text{ cm}, a = 47 \text{ cm und } A = 65 \text{ cm};$$

somit wird:

$$\varepsilon \sim 5,3' \text{ und } \eta \approx 7''.$$

Man erhält aus $\triangle ABC$, falls bei A der für die betreffende Substanz charakteristische Grenzwinkel α der Totalreflexion erreicht wird:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{p+s}{q+t};$$

aus $\triangle ADE$ folgt:

$$t = r \cdot \sin \alpha$$

$$s = r(1 - \cos \alpha)$$

und damit erhält man die Gleichung:

$$(2) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{p+r(1-\cos \alpha)}{q+r \cdot \sin \alpha}.$$

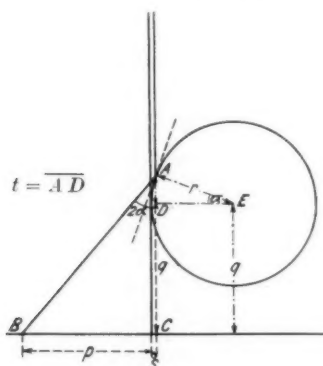


Fig. 4

Diese Gleichung (2) ergibt für p :

$$(3') \quad p = q \operatorname{tg} 2\alpha + r(\sin \alpha \operatorname{tg} 2\alpha - 1 + \cos \alpha).$$

Da hier $\alpha \approx 10^{-3}$ ist, wird:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \alpha^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{8} \dots$$

und man gewinnt für die Effektbreite die Reihenentwicklung

$$(3) \quad p = 2q\alpha + \frac{3}{2}r\alpha^2 - \frac{r}{8}\alpha^4 \dots$$

Gemäß Gleichung (3) setzt sich die Effektbreite zusammen aus einem reinen Abstandsgliede ($2q\alpha$), in das der Grenzwinkel der Totalreflexion linear eingeht und in dem der Zylinder-

radius nicht vorkommt, und einem Gliede $\left(\frac{3}{2}r\alpha^2\right)$, das eine Radiusabhängigkeit der Effektbreite in sich birgt; die Glieder höherer Ordnung können vernachlässigt werden.

Eine Diskussion der Frage, in welchen Fällen die Radiusabhängigkeit der Effektbreite bei der Auswertung zu berücksichtigen ist, kann hier unterbleiben, da bei der weiteren Ausgestaltung des Verfahrens sich eine Differenzmethode ergeben hat, bei der die Radiusabhängigkeit herausfällt.

3. Verwendung von Zylindersegmenten geringer Krümmung

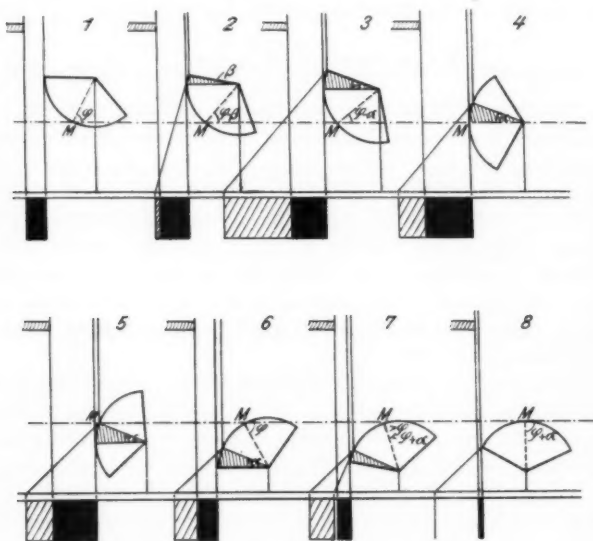
Bei Zylinderflächen von geringer Krümmung erstreckt sich der Bereich der Totalreflexion über ein größeres Flächengebiet, dadurch erhält man größere Intensität und es machen sich Inhomogenitäten der Oberfläche weniger bemerkbar. Aus diesen Gründen wurden bei den folgenden Versuchen Zylinderflächen geringer Krümmung (Radius 2—8 m) benutzt. Man ist dann allerdings gezwungen, von Vollzylindern abzusehen und Segmente zu benutzen. Es wurden ebene Substanzplatten verwendet und die erforderlichen geringen Krümmungen durch Durchbiegung erzeugt.

Die dabei erhaltenen Zylindersegmente¹⁾ müssen so in den Strahlengang gebracht werden (vgl. Fig. 1), daß die Strahlen sie mindestens in einem Winkelbereich von $0 - \alpha^0$ treffen. Die Justierung bereitet gewisse Schwierigkeiten, die durch folgendes Verfahren überwunden wurden: Die Platte wird unter subjektiver Kontrolle mittels Leuchtschirm möglichst gut vorjustiert. Zur weiteren Justierung wird eine Drehung um eine Zylindrerzeugende benutzt. Man wählt zweckmäßig eine in der Mitte der Platte liegende Erzeugende als Drehachse. Die Zylinderachse selbst kann praktisch nicht als Drehachse Ver-

1) In Wirklichkeit handelt es sich dabei nicht um ein reines Zylindersegment, vielmehr wird die Platte in ihrer Längsrichtung gegen die Enden zu immer schwächere Krümmung annehmen. Das zur Auswertung benutzte Verfahren ermöglicht jedoch den dadurch bedingten Fehlereinfluß auszuschalten, wie später gezeigt werden wird. Außerdem sind die Krümmungen wegen der auftretenden Querspannungen über die Plattenbreite hin nicht konstant. Die Größe dieser Abweichung wird in dem Abschnitt II, 2 bei den Bemerkungen über die Bestimmung des Krümmungsradius näher besprochen.

wendung finden, da sie zu weit abliegt und im allgemeinen auch nicht genau genug bekannt ist.

Die Verwendung einer Zylindererzeugenden als Drehachse bei dem Justierverfahren bringt einen neuen Gesichtspunkt für die Auswertung hinein. Die Erscheinungen seien an Hand der schematischen Fig. 5¹⁾ erläutert. Da man den Winkel des Zylindersegmentes $2\varphi = \frac{d}{r}$ (d = Länge der Platte, r = Zylinder-



Einfluß der Drehung des Zylindersegmentes
Fig. 5

radius) größer als α wählen muß, so gibt es einen gewissen Bereich, in dem die Bedingung, daß mindestens die Winkel

1) Bei diesen Bildern sind zwecks besserer Deutlichkeit der Grenz-
winkel der Totalreflexion und die Krümmung der Platte außerordentlich
vergrößert worden. (In Wirklichkeit betrug der Grenzwinkel 10—25',
der Winkel des Zylindersegmentes $2\varphi = 1^\circ 6' - 21'$, der Krümmungsradius
2—8 m.) Dies und die Tatsache, daß es sich in Wirklichkeit hier nicht
um ein reines Zylindersegment handelt (Fußnote 1 S. 195), haben zur
Folge, daß die quantitativen Verhältnisse bei diesen Bildern zum Teil
anders sind als bei den Versuchen selbst.

$0 - \alpha^\circ$ der auffallenden Strahlung dargeboten werden, erfüllt ist. Wir wollen die Erscheinungen betrachten, ausgehend von Bild 1 der Fig. 5, in welchem das Zylindersegment so steht, daß eben erstmals ein tangierender Strahl an der oberen Kante zustande kommt. Dieser kann gleichzeitig als erster totalreflektierter Strahl (unter dem Winkel 0) aufgefaßt werden. Dreht man nun das Zylindersegment um Punkt M , so zeigt Bild 2, wie sich allmählich der Fächer der totalreflektierten Strahlen ausbildet, bis in der Lage von Bild 3 nach einer Drehung um α der Grenzwinkel der Totalreflexion erreicht ist und der Fächer erstmals seine volle Ausbildung gefunden hat. Bei weiterer Drehung in die Symmetriestellung (Bild 4) und darüber hinaus bis zur Lage von Bild 6 bleibt der Fächer voll erhalten. Die Lage von Bild 6, in der der Fächer der totalreflektierten Strahlen letztmals vollständig auftritt, ist nach einer Weiterdrehung um den Winkel φ gegenüber der Symmetriestellung erreicht worden. Wird noch weiter gedreht, so baut sich der Fächer, wie Bild 7 zeigt, wieder ab, aber diesmal von der Seite der tangierenden Strahlen aus, bis schließlich in der Grenzlage von Bild 8 die Grenzstrahlen als letzte totalreflektierte Strahlen verschwinden.

Wir können somit bezüglich der totalreflektierten Strahlung 3 Winkelbereiche unterscheiden:

1. einen Winkelbereich, in dem der *ganze Fächer* vorliegt (zwischen den Bildern 3 und 6). Dieser Bereich umfaßt einen Drehwinkel von $(2\varphi - \alpha)$,

2. einen Bereich, in dem der *Grenzstrahl erhalten* bleibt (von Bild 3—8). Dieser Bereich umfaßt den Drehwinkel 2φ ,

3. einen Bereich, in dem *Totalreflexion überhaupt* stattfindet (Bild 1—8). Dieser Bereich umfaßt den Winkel $(2\varphi + \alpha)$.

Für die Schwierigkeit bei der Justierung ist maßgebend, daß der Winkelbereich

$$(4) \quad 2\varphi + \alpha = \frac{d}{r} + \alpha^1)$$

$$(d = \text{Plattenlänge}),$$

in dem Totalreflexion *überhaupt* auftritt, bei den wirklichen Verhältnissen nur etwa $1/2 - 1 1/2^\circ$ umfaßte. Innerhalb dieses

1) Diese Formeln und die an sie geknüpften Betrachtungen gelten ihrer Ableitung gemäß streng nur für reine Zylindersegmente.

Bereiches müssen eine größere Anzahl von Aufnahmen erfolgen. Von diesen Aufnahmen sind für die Bestimmung des Brechungs-exponenten nur diejenigen maßgebend, welche im Bereich:

$$(5) \quad 2\varphi - \alpha = \frac{d}{r} - \alpha$$

liegen, in dem der Fächer der totalreflektierten Strahlen *vollständig* vorliegt; denn vorher ist der Grenzstrahl noch nicht ausgebildet, und nachher ist der tangierende Strahl nicht mehr vorhanden, da, wie Bild 7 und 8 zeigen, jetzt die direkte Strahlung nicht mehr durch die Zylinderoberfläche, sondern durch die Kante des Zylindersegmentes begrenzt wird.

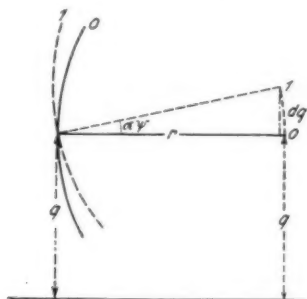


Fig. 6

Das mitgeteilte Justierverfahren durch Drehung um eine Zylindererzeugende als Achse hat noch eine wichtige Folge für den Plattenabstand q . Wie die Bilder 1—8 deutlich erkennen lassen, nimmt der Abstand q mit zunehmender Drehung ab. Dies bedeutet aber gemäß Formel (3), daß auch die Effektbreite sich ändert.

Betrachtet man nun die Effektbreite in Abhängigkeit von dem Drehwinkel ψ , so ergibt sich nach Gleichung (3):

$$dp = 2\alpha dq;$$

und ferner nach Fig. 6 für eine Drehung des Segmentes um den kleinen Drehwinkel $d\psi$:

$$dq = r d\psi.$$

Man erhält somit folgende für die experimentelle Durchführung der Methode bei kleinen Krümmungen grundlegende Gleichung:

$$(6) \quad \alpha = \frac{1}{2r} \cdot \frac{dp}{d\psi}.$$

Falls man die jeweiligen Effektbreiten als Funktion des Drehwinkels ψ aufträgt, so muß sich für den Bereich, in dem alle die zum Beweise von Formel (6) benutzten Voraussetzungen erfüllt sind, eine lineare Abhängigkeit zwischen p und ψ ergeben. Dieser geradlinige Teil der in folgendem kurz als *Drehkurve* bezeichneten p - ψ -Kurve gestattet dann die Bestimmung des Grenzwinkels α gemäß Gleichung (6).

II. Anwendung des Verfahrens

1. Röntgenanlage

Als Hochspannungsgenerator fand ein Symmetrieinduktor der Firma Reiniger, Gebbert & Schall, Erlangen, mit Quecksilberstrahlunterbrecher Verwendung, an den eine Gleichrichteranlage mit zwei Ventilröhren der A. E. G., Type V. T. angeschlossen war. Die benutzte Röntgenröhre war eine wassergekühlte C. H. F. Müller-Röhre mit Cu-Antikathode, Goetze-Strichfokus und einem Lindemannfenster, die unter Einschaltung eines Ni-Filters von 10μ Dicke in den Strahlengang die benutzte $\text{Cu}_{K\alpha}$ -Strahlung lieferte. In die Kühlwasserleitung waren vor und hinter der Röhre je ein Thermometer eingeschaltet; bezeichnet a die pro Sekunde durchfließende Kühlwassermenge, Δt die Temperaturdifferenz der Thermometer und J den durch die Röhre fließenden Strom in Milliampere, so ergibt sich die Spannung an der Röhre aus der Formel:

$$(7) \quad V_{kv} = \frac{a \cdot \Delta t}{0,24 \cdot J \text{ (mA)}}.$$

Die Einstelldauer dieses „Thermovoltmeters“ beträgt nur wenige Sekunden.

2. Krümmung der Substanzplatte

Zur Erzeugung der schwachen Krümmungen wurde eine Vorrichtung gebaut, in welcher ebene Platten in gewünschtem Maße durchgebogen werden konnten (vgl. Fig. 7). Sie besteht im wesentlichen aus einem kastenförmigen Rahmen Ra , dessen

eine Längsseite vier Klauen $B_{1,2,3,4}$ aufweist, hinter denen die durchzubiegende Platte zu liegen kommt. Die Durchbiegung erfolgt in der Mitte der Platte mit Hilfe eines stabförmigen Preßkörpers, der durch die Schraube $Schr_1$ bewegt werden kann. Die Zwischenräume zwischen den Klauen sind notwendig, damit die Strahlen die Substanzplatte tangierend erreichen und verlassen können. Zur Justierung und insbesondere zur Aufnahme der Drehkurve dient die Schlittenführung mit Mikro-

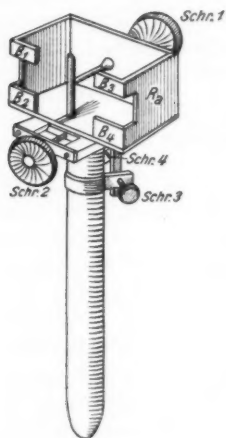


Fig. 7
Plattenträger

metertrieb $Schr_2$ und die Drehfeinbewegung mittels der Schraube $Schr_3$ und der Gegenschraube $Schr_4$.

Die Bestimmung des Krümmungsradius der Substanzplatte erfolgte mit Hilfe von Interferenzstreifen. Das Licht eines Na-Brenners wurde durch eine Linse parallel gemacht, traf auf eine vor dem Objektiv eines Meßmikroskopes befindliche Glasplatte unter 45° und wurde so teilweise nach der Substanzplatte hingelenkt, welche zur Erzielung von Interferenzstreifen mit einer planen, durch Gummischnören leicht festgehaltenen Glasplatte bedeckt und mit einer zweiten berußten Glasplatte hinterlegt war. Die auftretenden Interferenzstreifen wurden mit dem Meßmikroskop ausgemessen.

Wie bereits (Fußnote 1 S. 195) erwähnt, nimmt die Krümmung der Platte infolge von Querspannungen von der Mitte aus nach der Ober- und Unterkante hin ab. Das bedingt, daß als Interferenzstreifen keine Geradenschar, sondern eine Hyperbelschar¹⁾ auftritt. Um die Abweichung des Krümmungsradius von dem Wert in der Mitte für verschiedene Höhen der Platte festzustellen, wurde eine photographische Aufnahme der Interferenzstreifen an verschiedenen Stellen ausgemessen und zwar in der Mitte und in ein Viertel und drei Viertel der Plattenhöhe. Dies entspricht bei einer Gesamthöhe der Platte von

1) Diese Hyperbelscharen können nach Cornu, *Compt. rend.* 69. S. 333. 1869, zur Bestimmung des Poissonkoeffizienten benutzt werden.

1,8 cm einem Bereich von $\pm 0,45$ cm von der Plattenmitte. In diesem Bereich ergab sich¹⁾ eine Schwankung der Krümmung um 2 Proz.

Bei den Messungen wurde im allgemeinen der Krümmungsradius nur in der Mitte der Platte bestimmt und die Effektbreiten wenn möglich ebenfalls in den Mitten der Aufnahmen ausgemessen. Ausnahmen bildeten der Versuch mit der versilberten Platte (vgl. Abschnitt II, 4) und die Messungen an Flüssigkeiten (vgl. Abschnitt II, 5). Nimmt man an, daß die Plattenhöhe, für die der Krümmungsradius bestimmt wurde und die Höhe, in der die Effektbreite ausgemessen wurde, sich um etwa 0,1 cm unterscheiden, so liegt der dadurch bedingte Fehler innerhalb der Meßgenauigkeit.

3. Justierung

Gemäß den für die Justierung maßgebenden Bedingungen (vgl. Abschnitt I, 3) gestaltet sich diese folgendermaßen:

Bei erstmaliger Justierung ist dafür zu sorgen, daß die die Antikathode tangential verlassenden Röntgenstrahlen in möglichster Nähe am Zylindersegment vorbeigehen, da dann die scheinbare Größe (Projektion) des Brennflecks und damit der schädliche Winkel η (vgl. Fig. 2 und Fig. 3) am kleinsten wird.

Weiterhin ist die Drehachse des Plattenträgers in die Vorderfläche der durchgebogenen Substanzplatte zu verlegen. Hierzu wird ein Meßmikroskop von oben über die Mitte der Vorderfläche der Substanzplatte eingestellt. Beim Hin- und Herdrehen des Rahmens mittels der Schrauben $Schr_{3,4}$ (vgl. Fig. 7) läßt sich leicht die Lage des Drehpunktes auf der Oberkante der Substanzplatte erkennen und durch entsprechendes Verschieben des Rahmens Ra durch die Schraube $Schr_2$ bewirken, daß dieser Drehpunkt in die Vorderfläche der Substanzplatte fällt.

Dann muß der Substanzplatte noch eine solche Lage gegeben werden, daß sie mit der Richtung der auftreffenden Röntgenstrahlen Winkel bildet, die noch im Bereich der Totalreflexion gelegen sind.

1) Die Auswertung erfolgte wie bei den Messungen in Abschnitt II, 4.

4. Messungen an festen Stoffen

Kronglas. Als Substanzplatte wurde ein Stück Spiegelglas benutzt, von dem der Spiegelbelag chemisch entfernt war. Die Vorderfläche des Spiegels, an der die Totalreflexion stattfinden sollte, wurde aufs sorgfältigste chemisch gereinigt und entfettet.

Die Bestimmung des Drehwinkels ψ für die Drehkurve erfolgte bei dem vorliegenden erstmaligen Aufbau dadurch, daß die Verschiebung eines geeigneten Punktes des Halterahmens mit dem Okularmikrometer eines Meßmikroskopes gemessen wurde. Der Drehradius für den beobachteten Punkt wurde auf einen Zirkel übertragen und mittels eines Komparators ausgemessen. Die Bestimmung der Winkelverdrehung würde leichter und genauer erfolgen können, wenn man eine Dreheinrichtung mit längerem Hebelarm und geeigneter Mikrometervorstellung benutzen würde.

Bei den vorliegenden Messungen an Kronglas betrug bei einem Drehradius von 2,40 cm und einer jeweiligen Verschiebung um 1 Skt. = $\frac{1}{625}$ cm der Zuwachs des Winkels ψ : $\frac{1}{1500}$, d. h.: $\sim 2' 20''$.

Die Aufnahmen erfolgten fortlaufend mit 15 Min. Expositionsdauer auf Neo-Röntgenplatten der Firma Schleussner bei einer Röhrenbelastung von 2,1 mA¹⁾ und einer Spannung von 23 kV [bestimmt nach Formel (9) aus $\Delta t = 0,8^\circ$ und $a = 14,7 \text{ cm}^2/\text{sec}$].

Eine Serie dieser Aufnahmen²⁾ zeigt Fig. 8. Bei den Bildern a—c, 0 und 1 erkennt man die allmähliche Ausbildung des Fächers der totalreflektierten Strahlen, entsprechend den Bildern 1, 2, 3 der Fig. 5. Dann ist der Fächer bis etwa Nr. 5 voll vorhanden; danach beginnt der Abbau des Fächers von der Seite des tangierenden Strahles aus, entsprechend den Bildern 7 und 8 der Fig. 5.

Der keilförmige Verlauf der Grenzen bei den ersten und letzten Bildern ist darauf zurückzuführen, daß die Kanten der Platte nicht genau parallel zur Drehachse orientiert waren. Für die Auswertung spielt diese Ungenauigkeit keine Rolle, da

1) Eine stärkere Belastung der Röhre war nicht möglich, da der benutzte Symmetrieinduktor eine größere Leistungsentnahme nicht zuließ.

2) Da meist mehrere Aufnahmen auf einer Platte übereinander gemacht wurden, so sind bei einigen der Abzüge oberhalb bzw. unterhalb des eigentlichen Bildes Reste weiterer Bilder zu sehen.

diese Aufnahmen hierbei nicht bewertet werden. Innerhalb des für die Auswertung nutzbaren Bereichs weist die Effektbreite längs der Höhe nur geringe Schwankungen auf. (Vgl. die Tabelle der Effektbreiten.) Ferner zeigt sich auf den ersten und letzten Bildern der Fig. 8 (besonders bei den Bildern b, c, 0, 7, 8) eine Intensitätsanhäufung an der Begrenzung der total-reflektierten Strahlen. Wie in Abschnitt I, 3 (Fußnote 1 S. 195) bereits erwähnt, wird die Krümmung der Platte nach den

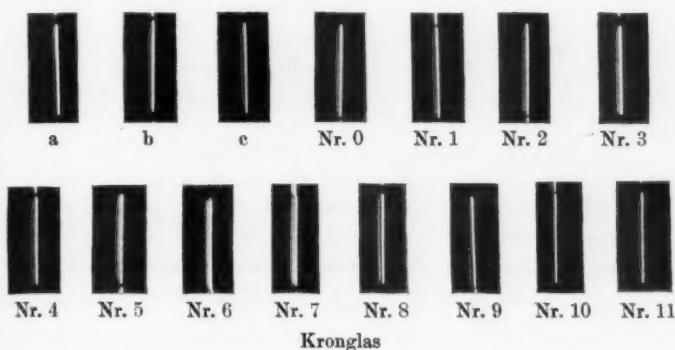


Fig. 8

Enden zu bis zum Werte Null abnehmen. Dadurch entspricht dort einem bestimmten Bereich des Auftreffwinkels eine größere Plattenfläche. Ein größerer Teil der auftreffenden Strahlung wird somit in denselben Fächerteil reflektiert, so daß die Intensität zunimmt.

An den Bildern 2 und 3 von Fig. 8 erkennt man (auf den Originalplatten deutlicher zu sehen) außerhalb des Gebietes der Schwärzung durch totalreflektierte Strahlen eine weitere schwache Schwärzung, deren äußere Begrenzung einen schrägen Verlauf zeigt, der darauf hinweist, daß die Begrenzung durch die Plattenkante bewirkt wird. Zur Erklärung dieser Erscheinung kann man gewöhnliche Reflexion¹⁾ heranziehen.

1) Nach der Formel (vgl. W. Linnik u. L. Lashkarew, Ztschr. f. Phys. 38. S. 659—671. 1926):

$$\frac{J_r}{J_0} = \left(\frac{\varphi}{\alpha} - \sqrt{\frac{\varphi^2}{\alpha^2} - 1} \right)^4$$

(Fortsetzung umseitig)

Die Bestimmung des Krümmungsradius aus den Interferenzstreifen erfolgte nach der Formel:

$$r = \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{\lambda},$$

worin $a_{n+1}^2 - a_n^2$ nach der Gauss'schen Methode der kleinsten Quadrate aus

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 6 \frac{2 \sum_{v=1}^n v a_v^2 - (n+1) \sum_{v=1}^n a_v^2}{n(n^2-1)}$$

berechnet wurde und λ die Wellenlänge der Na_D -Linie bezeichnet.

Bei Kronglas ergaben sich für die halben Abstände a_n der Streifen gleicher Ordnung n und für die Abweichung Δr des nach obigen Formeln berechneten Mittelwertes r der Radiusbestimmung von den jeweiligen Einzelwerten folgende Werte:

Ordnung n	Breite a_n cm	a_n^2	r berechnet cm	Δr
1	0,221	0,0488	900	1
2	0,319	0,1018	947	46
3	0,397	0,1576	886	15
4	0,458	0,2098	907	6
5	0,513	0,2632	913	12
6	0,563	0,3170	832	69
7	0,605	0,3660	959	58
8	0,650	0,4225	862	39
9	0,688	0,4733		

(α = Grenzwinkel der Totalreflexion und φ = Einfallswinkel), ist für Bild 2:

$$\varphi \leq \alpha + 2,3' = 14,9'.$$

Somit ergibt sich für die reflektierte Strahlung eine Intensität:

$$J_r = \frac{1}{17} J_0,$$

die noch für eine geringe Schwärzung hinreichen dürfte. Für Bild 3 wird:

$$\varphi \leq \alpha + 2 \cdot 2,3' = 17,2'.$$

Hieraus ergibt sich:

$$J_r = \frac{1}{28} J_0.$$

Fährt man so fort, so erkennt man, wie die Intensität zum Beobachten der Erscheinung bald zu schwach wird und in der Tat ist bei Bild 4 kaum noch etwas von ihr zu bemerken.

Im Mittel erhält man hieraus einen Radius von

$$r = 901 \pm 15 \text{ cm } (\pm 1,7 \text{ Proz.})$$

Die Effektbreiten wurden mit einem Komparator gemessen und zwar im allgemeinen in der Mitte der Aufnahmen.

Bei den Messungen an Kronglas wurden die Effektbreiten auch in $\frac{1}{4}$ - und $\frac{3}{4}$ -Höhe der Aufnahmen ausgemessen. Die folgende Tabelle enthält die erhaltenen Werte.

Effektbreite p (cm) in Höhe:

Nr.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
0	0,1240	0,1385	0,1512
1	0,1455	0,1520	0,1515
2	0,1504	0,1505	0,1480
3	0,1475	0,1472	0,1455
4	0,1453	0,1450	0,1446
5	0,1403	0,1400	0,1400
6	0,1360	0,1355	0,1351
7	0,1324	0,1320	0,1318
8	0,1275	0,1270	0,1266
9	0,1319	0,1380	0,1428
10	0,1514	0,1591	—
11	0,1733	(0,180)	—

In Fig. 9 sind die entsprechenden Drehkurven dargestellt. Dabei bedeuten die Abszissen Skalenteile im Okularmikrometer des Meßmikroskopes und gleichzeitig die Nummer des entsprechenden Bildes in Fig. 8. Gemäß den Angaben zu Beginn dieses Abschnittes entspricht jedem Skalenteil eine Winkeländerung $\Delta\psi = \frac{1}{1500}$. Die Kurve a der Fig. 9 gibt die Ergebnisse der Messungen in der Aufnahmenmitte und die Kurve b diejenigen in $\frac{1}{4}$ der Aufnahmenhöhe wieder. Die Werte für $\frac{3}{4}$ der Aufnahmenhöhe liegen so nahe an der Kurve a, daß eine besondere Kurve dafür nicht gezeichnet werden konnte. Aus der Figur ergibt sich, daß lediglich die Werte, die außerhalb des zur Berechnung benutzten geradlinigen Teiles liegen, eine stärkere Streuung aufweisen. Die Abweichungen im geradlinigen Teil sind, wie es genauer aus der Tabelle zu erkennen ist, relativ gering und bedingen im wesentlichen eine Parallelverschiebung der Drehkurve. Die Auswertung der 3 Meßreihen

ergibt aus dem geradlinigen Teil der Drehkurve gemäß der Formel (6) für den Grenzwinkel α der Totalreflexion:

$$\alpha_{1/4} = 12,5'; \quad \alpha_{1/2} = 12,6'; \quad \alpha_{3/4} = 12,6',$$

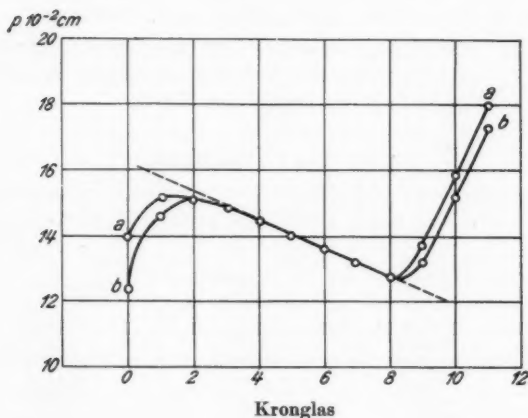


Fig. 9

im Mittel: $\alpha = 12,6'$ als Grenzwinkel der Totalreflexion von Kronglas vom spez. Gew. $s = 2,53$ für $\text{Cu}_{K\alpha}$ -Strahlung ($\lambda \approx 1,537 \text{ \AA}$) und $\delta = 6,7 \cdot 10^{-6}$.

Der Grenzwinkel der Totalreflexion von Kronglas wurde bereits von Linnik und Lashkarew (vgl. die Tabelle der Einleitung) nach einem anderen Verfahren (vgl. Einleitung) für die Wellenlänge von $\text{Cu}_{K\alpha}$ -Strahlung zu $\alpha = 13'$ bestimmt; es ergibt sich somit eine gute Übereinstimmung.

Silber. Ein Stück Spiegelglas wurde zunächst in Salpetersäure gekocht, dann mit Ammoniak, Alkohol usw. aufs sorgfältigste gereinigt und zuletzt mit destilliertem Wasser gewaschen. Das so vorbereitete Glas wurde chemisch versilbert¹⁾, wobei der Spiegel unter stetem Schütteln der Lösung bei etwas erhöhter Temperatur über der Bunsenflamme rasch abgeschieden wurde. Die übrigbleibende Lösung wurde dann abgegossen

1) Versilberungslösung nach Kohlrausch, 15. Aufl., S. 25, Abschnitt 8, 6.

und der Spiegel mit destilliertem Wasser mehrmals nachgespült. Die so erhaltenen Silberspiegel wurden zur Vermeidung von Sulfidbildungen in die Nähe von Bleiazetatlösung gebracht. Der Silberspiegel wurde bis zur Hälfte der Plattenhöhe wieder abgeschabt, um zur Bestimmung der Interferenzstreifen einen Teil der Glasoberfläche freizulegen. Man erhielt so bei den Aufnahmen gleichzeitig auch die Totalreflexion an Glas.

Eine gewisse Schwierigkeit bereitete das Aussuchen eines geeigneten Silberspiegels. Für das Auge erschienen die erzeugten Spiegel gleich gut. Bei den Aufnahmen zeigte sich jedoch bei einigen Spiegeln eine große Unschärfe der Grenze der Totalreflexion, so daß ihre Auswertung unmöglich war. Daher bedurfte es mehrerer Aufnahmen mit verschiedenen Spiegeln, bis man eine Serie von zur Auswertung hinreichend scharfen Bildern erhielt.¹⁾

Es wurden wie bei Kronglas von einer bestimmten Einstellung des Rahmens in der Skala des Meßmikroskopes an fortlaufend Aufnahmen von je 30 Min. Expositionsdauer, bei einer Röhrenbelastung von 2,1 mA und einer Spannung von 29 kV ($\Delta t = 0,9^\circ$ und $a = 16 \text{ cm}^3/\text{sec}$) gemacht, wobei nunmehr der Spiegel jeweils um 2 Skt. $= \frac{2}{625} \text{ cm}$ weitergedreht wurde; dies entsprach bei einem Drehradius von 2,40 cm einem Winkel $\Delta \psi = \frac{2}{1500}$, d. h. im Winkelmaß $= 4' 40''$.

Eine Serie dieser Aufnahmen²⁾ zeigt Fig. 10. Hierbei ist deutlich der Unterschied der Effektbreite bei Glas zu der von Silber zu sehen und man erkennt, daß der Grenzwinkel der Totalreflexion bei Silber etwa doppelt so groß ist wie bei Glas.

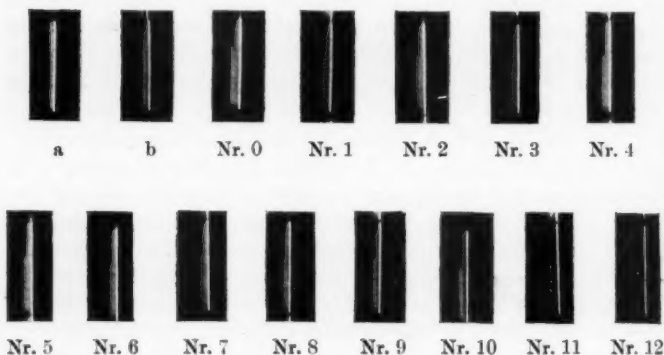
Die Bestimmung des Krümmungsradius erfolgte an dem von Silber befreiten oberen Teil der Platte; da die Effektbreiten für Silber an einer anderen Stelle der Aufnahmen gemessen wurden, ergibt sich eine Verringerung der Genauigkeit für die Berechnung des Grenzwinkels der Totalreflexion. Eine Abschätzung des Fehlers ermöglicht die Bestimmung des Krümmungsradius für verschiedene Höhen in Abschnitt II, 2. Die

1) Vgl. ähnliche Beobachtungen von Linnik u. Lashkarew, Ztschr. f. Phys. **38**. S. 659—71. 1926.

2) Vgl. Fußnote 2 S. 202.

Ausmessung der Interferenzstreifen ergab in diesem Falle folgende Werte:

Ordnung n	Breite a_n cm	a_n^2	r berechnet cm	Δr
1	0,123	0,0151	263	5
2	0,175	0,0306	258	0
3	0,214	0,0458	258	0
4	0,247	0,0610	258	0
5	0,276	0,0762	255	3
6	0,302	0,0912		



Silber und Kronglas

Fig. 10

Dies ergibt im Mittel einen Radius von

$$r = 258 \pm 1,3 \text{ cm } (\pm 0,5 \text{ Proz.})$$

Die bei den Aufnahmen an Silber gemessenen Effektbreiten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Hier bezeichnen die Abszissenwerte wiederum die Spiegelstellung und gleichzeitig die Nummer des entsprechenden Bildes der Fig. 10. Die Drehkurve von Silber zeigt Fig. 11, es entspricht dabei der Einheit der Abszissentheilung eine Winkeländerung $\Delta \psi = \frac{1}{750}$.

Nr.	Effektbreite p cm	Nr.	Effektbreite p cm
0	0,2445	7	0,2390
1	0,2685	8	0,2350
2	0,2660	9	0,2302
3	0,2602	10	0,2252
4	0,2550	11	0,2210
5	0,2491	12	0,2355
6	0,2443		

Die Drehkurve von Silber (vgl. Fig. 11) zeigt zwischen Nr. 2 und 10 geradlinigen Verlauf; daraus ergibt sich der

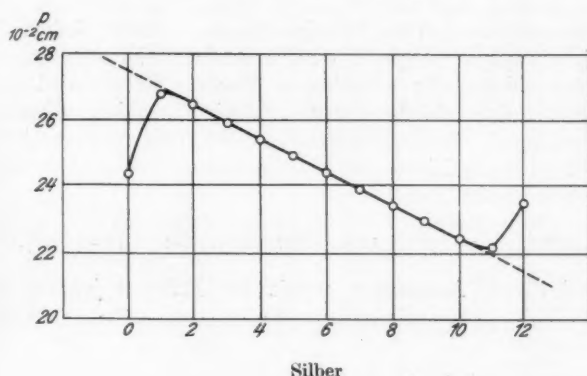


Fig. 11

Wert $\alpha = 25,5'$ als Grenzwinkel der Totalreflexion von Silber für Cu_K -Strahlung ($\lambda \approx 1,537 \text{ \AA}$) und $\delta = 27,5 \cdot 10^{-6}$.

Außerdem wurden an den Aufnahmen bei Silber die Effektbreiten für die freigelegte Kronglasoberfläche ausgewertet. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Nr.	Effektbreite p cm	Nr.	Effektbreite p cm
0	0,1515	5	0,1390
1	0,1493	6	0,1360
2	0,1467	7	0,1335
3	0,1441	8	0,1315
4	0,1415	9	0,1285

Aus dem geradlinigen Teil der Drehkurve berechnet sich

$$\alpha = 12,5' \quad \text{und} \quad \delta = 6,6 \cdot 10^{-6}.$$

Diesem Wert ist eine geringere Genauigkeit zuzuschreiben als dem bei der vorhergehenden Messung erhaltenen Wert: $\alpha = 12,6'$, $\delta = 6,7 \cdot 10^{-6}$, da die Glasoberfläche infolge des Abschabens der Silberschicht weniger gut war. Dies zeigte sich in stellenweise geringerer Schärfe der Grenze.

5. Messungen an Flüssigkeiten

Es gelang, die Methode auch auf die Bestimmung des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten auszudehnen, indem die Flüssigkeit auf die sorgfältig gereinigte Oberfläche einer durchgebogenen Glasplatte aufgetragen wurde. Dabei wird angenommen, daß die benetzende Flüssigkeitsschicht dieselbe Krümmung wie die Trägerplatte aufweist, eine Annahme, die bei der geringen Dicke der Flüssigkeitshaut wohl als erfüllt angesehen werden kann.

Glyzerin ($s = 1,265$) und *Chlorcalciumlösung* ($s = 1,49$).

Bei diesen Aufnahmen wurde der Rahmen jeweils um $2 \text{ Skt.} = \frac{2}{625} \text{ cm}$ weitergedreht. Dies entsprach wieder einem $\Delta \psi = \frac{2}{1500} = 4' 40''$.

Die Bestimmung des Krümmungsradius der Glasplatte aus den Interferenzstreifen ergab für

Glyzerin

Ordnung n	Breite a_n cm	a_n^2	r berechnet cm	Δr
1	0,120	0,0144	324	24
2	0,183	0,0335	290	10
3	0,225	0,0506	289	11
4	0,260	0,0676		

Hieraus berechnet sich im Mittel:

$$r = 300 \pm 11,5 \text{ cm} \quad (\pm 3,8 \text{ Proz.})$$

Chlorcalciumlösung

Ordnung n	Breite a_n cm	a_n^2	r berechnet cm	Δr
1	0,115	0,0132	238	10
2	0,165	0,0272	273	25
3	0,208	0,0433	243	5
4	0,240	0,0576	241	7
5	0,268	0,0718	238	10
6	0,293	0,0859		

Hieraus ergibt sich im Mittel:

$$r = 248 \pm 6,7 \text{ cm } (\pm 2,7 \text{ Proz.})$$

Die Bestimmung der Effektbreiten erfolgte so, daß in beliebiger Plattenhöhe die jeweils besten Stellen ausgewählt und wie bei den vorigen Messungen ausgewertet wurden. Hierbei ergaben sich folgende Werte (die Abszisseneinheit entspricht einem $\Delta \psi = \frac{1}{750}$):

Glyzerin

Nr.	Effektbreite p cm
0	0,081
1	0,113
2	0,115
3	0,1135
4	0,1100
5	0,1080
6	0,1063
7	0,1040
8	0,1150

Chlorcalcium

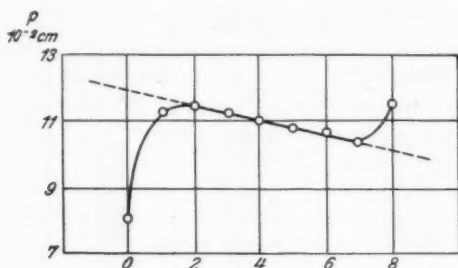
Nr.	Effektbreite p cm
0	0,1000
1	0,1070
2	0,1225
3	0,1205
4	0,1185
5	0,1165
6	0,1140
7	0,1120

Die Drehkurve von Glyzerin (Fig. 12) liefert:

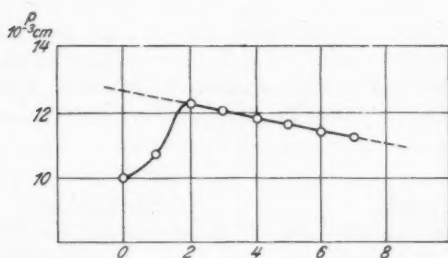
$\alpha = 9,5'$ als Grenzwinkel der Totalreflexion von Glyzerin für $\text{Cu}_{K\alpha}$ -Strahlung ($\lambda \approx 1,537 \text{ \AA}$) und $\delta = 3,8 \cdot 10^{-6}$.

Die Drehkurve der Chlorcalciumlösung zeigt Fig. 13; man erhält daraus:

$\alpha = 10,4'$ als Grenzwinkel der Totalreflexion von Chlorcalciumlösung vom spez. Gewicht $s = 1,49$ für $\text{Cu}_{K\alpha}$ -Strahlung ($\lambda \approx 1,537 \text{ \AA}$) und $\delta = 4,6 \cdot 10^{-6}$.



Glycerin
Fig. 12



CaCl_2 -Lösung
Fig. 13¹⁾

III. Schlußbetrachtung

In der vorliegenden Arbeit konnte das beschriebene Verfahren zur Bestimmung des Brechungsindex noch nicht mit der größtmöglichen Genauigkeit durchgeführt werden, im wesentlichen deshalb, weil die Einrichtungen zur Justierung, Drehung und Auswertung zunächst behelfsmäßig aufgebaut waren. Die unter diesen Bedingungen erzielte Genauigkeit dürfte für den Grenzwinkel α der Totalreflexion bei den festen Substanzen (Kronglas und Silber) unter vorsichtiger Abschätzung innerhalb ± 4 Proz., bei den Flüssigkeiten (Glycerin und Chlorkaliumlösung) innerhalb ± 7 Proz. liegen. Eine Erhöhung der Genauigkeit läßt sich bei einer weiteren Durchbildung des Verfahrens durch Verwendung besonders hierzu gebauter Einrichtungen erzielen.

1) Die Ordinatenbeschriftung muß 10^{-2} cm lauten.

Die Abweichungen einer durchgebogenen Platte von dem für das Verfahren eigentlich zu benutzenden Zylindersegment lassen sich vermeiden, wenn geschliffene Zylindersegmente Verwendung finden. Bei den Flüssigkeitsuntersuchungen ergibt sich dadurch der Vorteil, daß die Krümmung der Trägerplatte nur einmal genau bestimmt zu werden braucht.

In Abschnitt I, 3 war angegeben worden, daß die geringen Krümmungen hauptsächlich mit Rücksicht auf die günstigen Intensitätsverhältnisse gewählt wurden. Vor den Versuchen mit sehr schwach gekrümmten Platten waren Versuche mit zylindrischen Stäben und Flüssigkeitsstrahlen von ungefähr 0,1 cm Durchmesser, also von sehr großer Krümmung, ausgeführt worden. Dabei konnte der Totalreflexionseffekt zwar festgestellt werden, doch bereitete die Auswertung erhebliche Schwierigkeiten; insbesondere gelang es nicht den Flüssigkeitsstrahl hinreichend ruhig zu bekommen.

Wählt man Krümmungen von mittlerem Betrag ($r = 10$ bis 100 cm), so wird man auf das Drehverfahren verzichten können, welches wesentlich zur Überwindung der Justierschwierigkeiten bei den sehr schwach gekrümmten Platten ausgebildet wurde. Da bei mittleren Krümmungen die Lage der Zylinderachse hinreichend genau zu ermitteln ist, so kann die Formel (3) in Abschnitt I, 2 benutzt werden, in der die gesamte Effektbreite eingeht. Bei der Justierung wird man dann das Zylindersegment senkrecht zu einem schmalen Strahlenbündel so lange verschieben, bis der Fächer der totalreflektierten Strahlen vollkommen ausgebildet ist.

Zusammenfassung

Es wird eine Methode zur Bestimmung des Brechungsexponenten für Röntgenstrahlen entwickelt, bei der die Substanzplatten durch Druck eine schwache Krümmung erhalten und dadurch einem homogenen schmalen Röntgenstrahlenbündel verschiedene Auftreffwinkel darbieten. Die totalreflektierten Röntgenstrahlen liefern auf einer photographischen Platte eine bestimmte Verbreiterung der Schwärzung (Effektbreite). Bei den Aufnahmen werden die gekrümmten Substanzplatten um eine in ihrer Oberfläche liegende Zylindererzeugende als Drehachse gedreht. Aus der damit verbundenen Änderung der Effektbreite läßt sich bei Kenntnis des Drehwinkels der Grenz-

winkel der Totalreflexion errechnen. Das Verfahren wird praktisch auf die Bestimmung des Grenzwinkels der Totalreflexion von Kronglas und Silber angewandt.

Es lassen sich damit auch Brechungsexponenten von Flüssigkeiten bestimmen, wenn diese auf eine gekrümmte Trägerplatte in dünner Schicht aufgetragen werden. So wurden die Grenzwinkel der Totalreflexion für Glyzerin und konzentrierte Chlorcalciumlösung ermittelt. Die Genauigkeit der Messungen lag bei den festen Substanzen (Kronglas und Silber) bei vorsichtiger Abschätzung innerhalb ± 4 Proz., bei den Flüssigkeiten (Glyzerin und Chlorcalciumlösung) innerhalb ± 7 Proz. Die Genauigkeit läßt sich durch eine verbesserte Konstruktion des Apparates noch erhöhen, wofür Vorschläge gemacht werden.

Für die Anregung zu dieser Arbeit, für das große Interesse an ihrem Fortgang und insbesondere für die Bereitstellung der umfangreichen experimentellen Hilfsmittel bin ich Hrn. Geheimrat Prof. Dr. R. Wachsmuth zu großem Dank verpflichtet; Hrn. Privatdozent Dr. Mauz danke ich für seine stete Hilfsbereitschaft und weitgehende Förderung.

Auch der Stiftung „Georg Speyerhaus“, die durch Zuwendung von Mitteln die Arbeit ermöglichte, soll hier dankbar Erwähnung geschehen.

(Eingegangen 11. Dezember 1929)

**Unähnliche Abbildung
zur Messung der Durchmesser von Fixsternen
und Ultramikronen**

Von Konrad Kühne

(Mit 10 Figuren)

Inhalt: I. Einleitung: 1. Allgemeine Theorie der Abbildung: Ähnlichkeit und Unähnlichkeit. 2. Geschichte. — II. Spezielle Theorie von Michelson und Pokrowski: 1. Das Interferenzbild bei Michelson. a) Doppelspalt unter Vernachlässigung der Spaltbreite; b) Umrandung und Helligkeitsverteilung des Objekts; c) Berücksichtigung der Spaltbreite. 2. Pokrowski: a) Beugungstheoretische Ableitung; b) Die Einwände Eddingtons; c) Umformung auf den Ausdruck von Pokrowski. — III. Ausgeführte Messung von Spaltbreiten aus dem Interferenzbild: 1. Versuchsanordnung. 2. Messung. a) Photometrierung: Visuell; Photographisch; b) Auswertung. 3. Fehler. — IV. Bemerkungen zur Anwendung auf das Mikroskop. — V. Zusammenfassung. — VI. Literaturverzeichnis.

I. Einleitung

Die Umrandung des Objektivs gestattet bekanntermaßen eine objekttreue Abbildung nur bis zu einem gewissen Grade. Das Licht jedes einzelnen Objektpunktes wird über einen bestimmten, ausgedehnten Bereich im Bild ausgebreitet. Ist das Bild bedeutend größer als ein solcher Bereich, so wird die Ähnlichkeit mit dem Objekt augenscheinlich sein, und die einfachen Beziehungen der geometrischen Optik beschreiben dann das Bild in genügender Annäherung. Sind jedoch Bild und Bereich von derselben Größenordnung oder stehen sie gar im umgekehrten Verhältnis, so bedarf es eines allgemeineren, mathematischen Ansatzes, um nun vom Bild auf Form und Größe des Objekts schließen zu können. Die damit verbundenen Probleme sind von verschiedenen Seiten in Angriff genommen worden. Das Ziel der Arbeiten war hauptsächlich, die Größe der Objekte: etwa den Durchmesser von Fixsternen oder Ultra-

mikronen, zu bestimmen. Erst in zweiter Linie wird versucht, die Form zu ermitteln, wobei stets über die Helligkeitsverteilung auf dem Objekt gewisse vereinfachende Voraussetzungen gemacht werden.

Die vorliegende Arbeit soll in ihrem ersten Teil zunächst die Gleichberechtigung von Form und Helligkeitsverteilung zeigen. Dann soll auf eine wichtige von S. I. Pokrowski (11) angegebene Methode eingegangen und explizite dargelegt werden, inwieweit die von A. S. Eddington (12) dagegen erhobenen Einwände zu Recht bestehen. Im zweiten Teil der Arbeit soll die Anwendbarkeit einer Erweiterung der Theorie des Michelson-Sterninterferometers zum Zwecke, das Auflösungsvermögen eines Objektivs beliebig zu steigern, nachgewiesen werden.

1. Allgemeine Theorie der Abbildung: Ähnlichkeit und Unähnlichkeit

Die optische Abbildung kann als eine Vektortransformation angesehen werden. Wir denken uns eine vorgegebene Helligkeitsverteilung, die wir das Objekt nennen, in der Form eines Vektors im Raume von n -Dimensionen dargestellt. Diesen Vektor y zerlegen wir in seine n -Komponenten $y_1, y_2 \dots y_n$ und multiplizieren diese mit einem System von n^2 -Zahlen

$$\begin{matrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{matrix}$$

Die Summen $K_{11}y_1 + K_{12}y_2 \dots K_{1n}y_n$ usw. bilden dann die Komponenten eines neuen Vektors y' , die wir übersichtlich in der Form schreiben können

$$y'_x = \sum_{\xi=1}^n K_{x\xi} y_\xi, \quad x = 1, 2, 3 \dots n.$$

Die Zahlen $K_{x\xi}$ können hier in diesem allgemeinsten Falle natürlich ganz beliebige sein. In der praktischen Optik dagegen werden sie eine wenigstens in gewissen Bereichen stetige Zahlenfolge bilden. Wir können sie so als Funktionen von x und ξ , als $K(x, \xi)$, schreiben, wenn wir überdies die Vektoren y und y' als Vektoren im Raum von unendlich viel Dimensionen ansehen. Auch die Vektoren lassen sich dann

als Funktionen auffassen, so daß die Beziehung zwischen Bild und Objekt in der folgenden Gleichung ihren Ausdruck findet:

$$(1) \quad y'(x) = \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi.$$

Damit sind die Probleme der optischen Abbildung auf eine Integralgleichung zurückgeführt, und es lassen sich viele Aufgaben der abbildenden Optik durch die in der Theorie der Integralgleichung bekannten Methoden lösen.

Bevor wir uns mit diesen Aufgaben befassen, ist es nötig, sich über die optische Bedeutung der einzelnen Glieder der Gleichung (1) klar zu sein. Wir denken uns zu diesem Zweck ein möglichst einfaches Objekt, ein in einer Ebene t gelegene Helligkeitsverteilung $f(t)$. Ein bestimmtes Element dt , dieser Fläche strahlt also mit der Intensität $f(t)$. Der durch dieses Flächenelement hindurchtretende Lichtstrom $f(t) dt$ wird nun von irgendeinem abbildenden System über eine neue Ebene s ausgebreitet und zwar in einer Form, die durch die Verteilungsfunktion $K(s, t)$ gegeben ist. Dieser „Kern“ stellt demnach den Helligkeitsanteil dar, den ein Element in t an jeder beliebigen Stelle s des Bildes hat, oder mit anderen Worten, er ist das Bild eines „unendlich“ kleinen Objektes mit der Intensität Eins. Eine derartige Verteilung liefert jedes andere Flächenelement dt ebenfalls, so daß das Gesamtbild des Objekts durch die Summe über alle $K(s, t)f(t) dt$ beschrieben wird. Ist L die Umgrenzung des Objekts, so gelangen wir wieder zu unserer obigen Gleichung

$$\varphi(s) = \int^{(L)} K(s, t)f(t) dt.$$

Der wichtigste Teil der Gleichung ist der Kern. Er ist nach dem, was wir oben gesehen haben, vor allem ein Bestandteil des jeweils benutzten abbildenden Systems. Für die meisten läßt er sich als Lösung einer Differentialgleichung mit entsprechenden Randwerten berechnen, für andere könnte man ihn durch graphische Methoden gewinnen. Erst in zweiter Linie ist er von der Lage der Objektebene und der Bildebene abhängig. Denken wir uns z. B. eine optisch vollkommene Linse. Sie liefert von einem Punktobjekt in einer bestimmten Ebene

ein Punktbild. Verschieben wir die Ebene parallel zu sich, so werden aus dem Lichtpunkt Kreisflächen, die man nun als Kern auffassen kann. Die Integralgleichung liefert dann das Bild jedes beliebigen Objekts.

Eine solche Transformation macht aus einer Funktion f eine neue φ . Nur in Ausnahmefällen wird diese der ursprünglichen gleich sein, wie z. B. bei der eben erwähnten punktförmigen Abbildung. Der Kern hat hier seinen eigentlichen Sinn verloren. Dem Punkte t entspricht der Punkt s so, daß bei geeigneter Wahl der Koordinationssysteme und Maßstäbe stets $s = t$ ist. An dieser Stelle hat aber der Kern eine Singularität, die sich in der zweiten Ableitung als Sprung von der Größe Eins kennzeichnet. Da dann auch keine Integration stattfinden kann, gelangen wir zu dem uns selbst verständlichen Resultat

$$\varphi(s) = f(t).$$

Das Bild ist dem Objekt ähnlich. Von einer Gleichheit könnten wir erst reden, wenn über dies noch Koordinatensysteme und Maßstäbe die gleichen gewesen wären. Umgekehrt ist aber $K(s = t)$ nicht das einzige Kriterium für Ähnlichkeit. Es sind zu jedem Kern bestimmte Objekte denkbar, die ähnlich abgebildet werden. Die Integralgleichung nimmt dann die Form an

$$f(s) = \lambda \int^{(L)} K(s, t) f(t) dt.$$

Aus der Theorie der Fredholmschen Lösung ist bekannt, daß für gewisse Werte von λ Lösungen nach f vorhanden sind. L. Mandelstam (1) führt dies in einer kurzen Arbeit aus.

Wir müssen also ein anderes Maß für die Ähnlichkeit suchen. Nehmen wir zu jedem Punkte in t den konjugierten in s und bilden das Verhältnis der Intensitäten in den beiden Punkten, so können wir diese Zahl als Z -Koordinate über einer XY -Ebene auftragen. Die Endpunkte bilden dann eine Fläche, deren Krümmung ein Maß für die Ähnlichkeit ist. Im Falle der *ähnlichen* Abbildungen stellt sie eine zu XY parallele Ebene dar. Ist die Parallelität nur in gewissen Bereichen erhalten, während die Fläche in anderen mehr oder weniger gekrümmt oder geneigt ist, so wollen wir von *teilweiser Ähnlichkeit* sprechen. Ein praktisches Beispiel hierfür ist die

Abbildung durch Zylinderlinsen oder durch den Michelsonschen Doppelspalt, auf den wir später zurückkommen. In beiden Fällen bleibt das Bild objektstreu in der Richtung senkrecht zur Zylinderachse bzw. gemeinsamen Achse. Alle anderen Abbildungen bezeichnen wir als *unähnlich*.

Die Abbildung hat zum Zweck, von einem Objekt, das einer direkten Untersuchung unzugänglich ist, ein Bild in geeigneter Größe und Lage zu entwerfen, um dann durch dessen Untersuchung von diesem auf jenes zu schließen. Im Hinblick auf unsere Gleichung gesprochen heißt das, zu einem gegebenen $\varphi(s)$ das $f(t)$ zu finden. Das ist leicht und unumschränkt möglich, sofern es sich um ähnliche Abbildungen handelt. Auf erhebliche Schwierigkeiten stößt dagegen die Auswertung unähnlicher Abbildungen. Hier muß nicht nur der Kern, sondern auch Bild und Objekt als Funktion mathematisch darstellbar sein. Während das erste durch passende Wahl der Versuchsbedingungen wohl immer zu erreichen ist, läßt sich das letztere nur in sehr beschränktem Maße ermöglichen. Die Objekte können nur die primitivste Gestalt haben. Ist ihr Aufbau verwickelter, so wird er sich lediglich in rohen Umrissen beschreiben lassen. Immerhin ist auch das für einen Kreis von Beobachtung von solcher Bedeutung, daß auf die bisher ausgeführten und vorgeschlagenen Methoden der unähnlichen Abbildung eingegangen werden muß.

2. Geschichte

Infolge der eben dargelegten Schwierigkeiten ist die unähnliche Abbildung naturgemäß nur dort angewandt worden, wo die ähnliche versagte. Also vor allem da, wo es sich um die Messung sehr kleiner Objekte handelte, deren ähnliche Abbildung mit keinem Mittel zu erreichen ist.

Der erste, der den Gedanken ausgesprochen hat, die Größe eines Objekts aus gewissen Eigentümlichkeiten des unähnlichen Bildes zu bestimmen, war 1868 Fizeau (2). Seiner Ansicht nach mußte der Winkel, den die beiden Komponenten eines Doppelsternes miteinander bilden, aus dem durch die Beugenzug des Fernrohrobjektivs entstandenen Beugungsbild berechnen lassen. Wenige Jahre später griff Stéphan (3) diesen Gedanken auf und erweiterte ihn, indem er die Messung auf

einzelne Sterne ausdehnen wollte. Indes zeigte es sich bei einer Anwendung auf den Sirius und andere, daß die erwartete und für die Messung notwendige Verwischung der Interferenzringe noch keine vollkommene war. Ein bedeutende Verbesserung (4) der Versuchsanordnung war es dann, als das Objektiv bis auf zwei sich gegenüberliegende Ausschnitte abgeblendet wurde. Die Vorversuche im Laboratorium an rechteckigen Objekten entsprachen den Erwartungen, die Übertragung auf die Vermessung der Fixsterne führte jedoch zu keinem besseren Resultat als vorher: das Objektiv des zur Verfügung gestandenen Fernrohrs hatte einen zu geringen Durchmesser. Die Theorie, die Stéphan dazu gab, ist sehr kurz; der Unterschied zwischen rechteckigen und runden Objekten wird von ihm noch nicht erkannt.

Eine ganze Reihe von Jahren ereignet sich nichts wesentlich Neues. Lord Rayleigh macht wohl einmal (5) auf die Abhängigkeit des Interferenzbildes, wie es der Fresnelsche Spiegel liefert, von der Breite des Objekspaltes aufmerksam, und J. Walker (6) dehnt eine Untersuchung darüber auf andere Interferenzen aus, aber beide benutzen nicht ihre Resultate umgekehrt zur Messung der Spaltausmaße.

Erst 1890 gibt A. A. Michelson (7) eine grundlegende Theorie der Anwendung Fraunhoferscher Beugung zur Bestimmung von Fixsterndurchmessern. Vor das Objektiv des beobachtenden Fernrohrs ist ähnlich wie bei Stéphan ein Schirm gesetzt, der je nach dem Versuch eine oder zwei rechteckige Öffnungen hat. Als Objekte behandelt Michelson selbstleuchtende Rechtecke und Kreisscheiben. Um den Verhältnissen auf Sternen Rechnung zu tragen, wird der Fall einer nach den Rändern zu dunkler werdenden Kreisscheibe durchgeführt. Auch das Beispiel eines Doppelsternes finden wir. Die jeweils entstehenden Bilder sind kleine Scheibchen, die von Interferenzstreifen durchzogen sind, so daß wir also eine ausgesprochen unähnliche Abbildung vor uns haben. Demnach führt auch die Theorie von Michelson immer auf die oben hergeleitete Integralgleichung. Von besonderer Wichtigkeit aus der Michelsonschen Arbeit ist die Anordnung von zwei beugenden Öffnungen geworden, da Michelson gezeigt hat, daß sich diese weit außerhalb des Fernrohrobjektes befinden und

die hindurchtretenden Strahlenbündel durch Spiegel in das Rohr reflektiert werden können. Erst hierdurch ist eine wirkliche Messung von Fixsterndurchmessern möglich geworden.

An dieses Interferometer hat sich eine ausgedehnte Literatur geknüpft (8), deren ins einzelne gehende Behandlung hier zu weit führen würde. Nur die Arbeiten von M. Hamy (9) und Sp. Jones (10) seien erwähnt, die beide gewisse Vernachlässigungen Michelsons berücksichtigen und so eine vollkommenere Theorie des Interferometers geliefert haben.

Innerlich verwandt ist mit diesem Michelson-Sterninterferometer eine Anordnung, die 1910 von S. I. Pokrowski (11) angegeben worden ist. Während Michelson die beiden in das Interferometer fallenden Strahlenbündel sofort zur Interferenz bringt, werden sie hier erst rechtwinklig zueinander polarisiert. Die Grenze der Auflösung könnte dadurch gegenüber Michelson auf das Vielfache gesteigert werden. Jedoch weist A. S. Eddington (12) in einer kurzen Notiz darauf hin, daß aus prinzipiellen Gründen die Messung von Fixsterndurchmessern mit diesem Interferometer nicht möglich sei. Da die Einwände Eddingtons ganz allgemein gehalten sind, soll in der vorliegenden Arbeit exakt nachgewiesen werden, daß die bezweckte Messung in der Tat nicht ausführbar ist.

Das Michelson-Interferometer fand eine neue Anwendung, auf die bereits früher von Michelson selbst und E. Gehrcke (13) hingewiesen worden ist, in seiner Übertragung auf die Messung von Ultramikronen durch R. Gans (14), U. Gerhardt (15), O. v. Baeyer (16) und H. Siedentopf (17). Von diesen beschäftigen sich Gans und Siedentopf mit dem Problem lediglich theoretisch. Letzterer sucht das Auflösungsvermögen durch eine Spiegelkombination ähnlich der von Michelson angegebenen zu steigern. Wie F. Goos (18) jedoch zeigt, stellt diese Anordnung nichts anderes als eine Komplikation der Interferenzerscheinung dar, ohne den gewünschten Zweck zu erfüllen. Eine praktische Methode zur Messung haben U. Gerhardt und v. Baeyer angegeben und ausgeführt. Das Ultrateilchen wird durch eine Azimutblende an zwei diametral gegenüber liegenden Punkten beleuchtet, die als ein Doppelpsternpaar angesehen werden. Durch einen variablen Doppelspalt lassen sich die Interferenzen zur Deckung bringen. Aus

dem gegenseitigen Spaltabstand läßt sich dann der Durchmesser der Ultramikronen bestimmen. Die hier notwendige Trennung der Objekte in Selbstleuchter und Nichtselbstleuchter hat R. Bechmann (19) theoretisch behandelt. Er befaßt sich, wie übrigens andeutungsweise auch seine Vorgänger, nicht nur mit der Bestimmung der Größe der Teilchen, sondern gibt auch keinen Weg an, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen die Art der Helligkeitsverteilung auf ihnen zu finden. Inwieweit eine dahingehende Angabe eindeutig ist, soll weiter unten diskutiert werden. Hier sei auch eine Arbeit von E. Schröding (20) nicht vergessen, in der er sich mit der Kohärenz weit geöffneter Strahlenbüschel beschäftigt. Die Methode zur Prüfung dieses Problems beruht auf der Durchmessermessung sehr feiner glühender Drähte, ist also vollkommen identisch mit der Bestimmung der Durchmesser von Ultramikronen.

Es bleiben noch zwei Gruppen von Arbeiten zu erwähnen: Das Interferometer von V. Ronchi (21), das an der Stelle des Fernrohrobjektivs bzw. Okulars ein Beugungsgitter aus konzentrischen Ringen setzt; und eine Methode von M. A. Danson (22), die als abbildendes System das bekannte Jasmische Interferometer benutzt. Der Stern wird wegen seiner endlichen Ausdehnung in den Minimis der Interferenzstreifen, deren gegenseitiger Abstand etwa hundertmal so groß sein darf wie das Bild des Sternes vermutlich ist, nicht ganz verschwinden. Aus dem bleibenden Rest an Intensität läßt sich der Durchmesser des Sternes berechnen. Allerdings kommt wohl eine Anwendung gerade auf Sterne nicht in Frage, da deren Bild infolge der Luftunruhe fortwährend seine Helligkeit ändert, und daher eine Erfassung des Minimums nicht möglich sein wird.

II. Die spezielle Theorie von Michelson und Pokrowski

Die Versuchsanordnungen von Michelson und Pokrowski sind prinzipiell dieselben. Das Licht, das etwa von einem Stern kommt, fällt durch die zwei Spalte B (Fig. 1) und wird von diesen gebeugt. Zwei Spiegelpaare S_1S_2 und S_3S_4 leiten die beiden Strahlenbündel in das Fernrohr. Jeder Spalt für sich liefert ein Beugungsbild der bekannten Form (Fig. 2 gestrichelte Kurve). Im Unendlichen, d. h. im Brennpunkt des Fernrohrs, superponieren

sich beide, und geben, da sie kohärent sind, ein Interferenzbild, wie Fig. 2 die ausgezogene Kurve. Sind wie bei Michelson beide Strahlen parallel polarisiert, so ist das normale Beugungs-

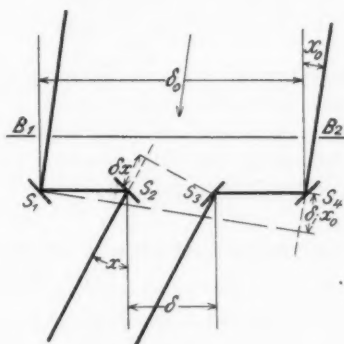


Fig. 1

bild von zusätzlichen Interferenzstreifen durchzogen, so daß die Kurve den tatsächlichen Intensitätsquerschnitt darstellt. Sind dagegen, wie bei Pokrowski, beide Bündel senkrecht

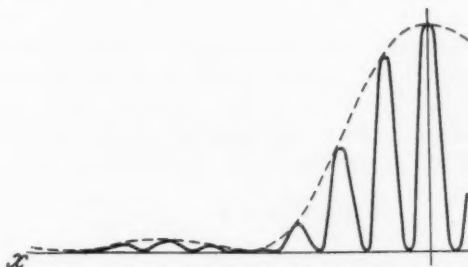


Fig. 2

zueinander polarisiert, so interferieren sie zu elliptischem Licht und Fig. 2 veranschaulicht das Verhältnis der Ellipsenachsen an jeder Stelle des Beugungsbildes. Die Auswertung dieses Interferenzbildes führt zur Beschreibung des Objekts. Michelson zeigt, daß hierzu ein Ausdruck genügt, der gegeben ist

durch das Verhältnis der Differenz der Intensitäten im Maximum und Minimum zur Summe der beiden, den er mit „Sichtbarkeit“ der Interferenzstreifen bezeichnet:

$$V = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}}.$$

Pokrowski führt seine Durchmesserbestimmung auf das einfache Verhältnis der beiden Achsen zurück. Um aber den Vergleich mit Michelson zu erleichtern, berechnen wir zuerst analog eine „Sichtbarkeit“ der Ellipsenachsen und formen diese später in das Verhältnis um.

1. Das Interferenzbild bei Michelson

a) Doppelspalt unter Vernachlässigung der Spaltbreite

Unser Ziel ist zunächst, die Gleichung für die Intensitätsverteilung im Interferenzbilde aufzustellen. Bezeichnen wir die Koordinaten des Objekts mit x_0 und y_0 , die des Bildes mit x und y (in Fig. 1 stehen y und y_0 senkrecht auf der Zeichenebene), so lautet die Integralgleichung nach Gleichung (1)

$$(2) \quad J = \int_0^{y_0} dy_0 \int_a^b K(x, x_0; y, y_0) g(x_0, y_0) dx_0.$$

Die Bestimmung des Kernes kann folgendermaßen erfolgen. Zwei Parallele und parallel polarisierte Wellen von gleicher Amplitude \mathfrak{A} , entsprechend den Bündeln durch B_1 und B_2 in Fig. 1, interferieren bei einer Phasendifferenz Δ so, daß für die Amplitude der neuen Welle die Beziehung gilt

$$A = 2\mathfrak{A} \cos \mu \Delta \quad \mu = \frac{\pi}{\lambda}.$$

Die Phasendifferenz Δ finden wir aus Fig. 1, wenn wir die Wegunterschiede berechnen, die zwei aus der Richtung x_0 kommende Strahlen haben, nachdem sie von den Spiegeln reflektiert und in eine andere, neue Richtung x gebeugt worden sind. Die Ordinaten y und y_0 bleiben hierbei unberücksichtigt, da sie keine Veränderung der Wegunterschiede zur Folge haben. Es ist dann, weil x und x_0 kleine Winkel sind,

$$\Delta = \delta \cdot x - \delta_0 \cdot x_0,$$

wenn mit δ der gegenseitige Abstand der inneren Spiegel ($S_2 S_3$) und mit δ_0 der Abstand der äußeren Spiegel S_1 und S_4 bezeichnet wird. Wie A , so ist auch die Amplitude \mathfrak{A} der hindurchgegangenen, abgelenkten Strahlen von x und x_0 abhängig. Sind a und b die Breite bzw. die Höhe der Spalte B , so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{\sin \mu a (x - x_0)}{\mu a (x - x_0)} \cdot \frac{\sin \mu b (y - y_0)}{\mu b (y - y_0)}.$$

Da wir die Gleichung (2) in Intensitäten schreiben wollen, ist also

$$K = A^2 = 4 \left[\frac{\sin \mu a (x - x_0)}{\mu a (x - x_0)} \cdot \frac{\sin \mu b (y - y_0)}{\mu b (y - y_0)} \right]^2 \cos^2 \mu (\delta x - \delta_0 x_0).$$

Nehmen wir an, daß das Objekt gleichmäßig über seine Oberfläche leuchtet, so wird

$$g(x_0, y_0) = \text{const.}$$

Die Grenzen in y_0 , also die Umrandung des Objekts, schreiben wir am einfachsten als Funktion von x_0 , während wir die Grenzen von x_0 symmetrisch zu einer Richtung α wählen, die beliebig sein soll. Wir behalten uns dadurch vor, das Objekt als Ganzes an eine beliebige Stelle verschieben zu können. Unsere Integralgleichung (2) nimmt also folgende Gestalt an

$$J = 2C \int_0^{f(x_0)} dy \int_{\alpha - \frac{d}{2}}^{\alpha + \frac{d}{2}} dx \left[\frac{\sin \mu a (x - x_0)}{\mu a (x - x_0)} \cdot \frac{\sin \mu b (y - y_0)}{\mu b (y - y_0)} \right]^2 \cdot \cos^2 \mu (\delta x - \delta_0 x_0) \cdot dx_0.$$

Für unsere Zwecke genügt es vorläufig, die beugenden Spalte als sehr klein anzunehmen. Dadurch werden

$$\frac{\sin \mu a (x - x_0)}{\mu a (x - x_0)} = \frac{\sin \mu b (y - y_0)}{\mu b (y - y_0)} = 1.$$

Führen wir außerdem die Integration über y_0 aus, so erhalten wir unter Vernachlässigung der Multiplikationskonstanten

$$J = \int_{\alpha - \frac{d}{2}}^{\alpha + \frac{d}{2}} f(x_0) \cos^2 \mu (\delta x - \delta_0 x_0) dx_0.$$

Zur Aufstellung des Ausdruckes für die Sichtbarkeit brauchen wir J_{\min} und J_{\max} . Die Lage der Maxima und Minima finden

wir, indem die Ableitung von J nach x gleich Null gesetzt wird. Es ist dann

$$x = \frac{n \cdot \pi}{2\mu \delta} + \frac{\delta_0 x_0}{\delta}.$$

Hieraus ergibt sich der Abstand zweier Interferenzstreifen zu

$$x_1 - x_2 = \frac{\pi}{2\mu \delta}.$$

Wir erhalten also das wichtige Resultat, daß die Breite der Streifen nur von dem Abstand der inneren Spiegel abhängt. Schieben wir z. B. die inneren Spiegel näher aneinander, so wandern die Streifen mehr und mehr auseinander, bis schließlich das ganze Bild gleichmäßig hell erscheint, wenn sie zusammenfallen, d. h. $\delta = 0$ ist. Aus diesem Grunde sind auch jene beiden Vorschläge von Michelson, die er in seiner ersten Abhandlung gibt, nicht verwendbar. Dort setzt er beide inneren Spiegel unmittelbar hintereinander, macht also das δ in der Tat gleich Null. Weiter kann man aus der Gleichung ersehen, daß jeder Punkt der Objektoberfläche, der nicht dasselbe x_0 hat, sein Interferenzbild an einer anderen Stelle entwirft, und zwar um so stärker verschoben, je größer das Verhältniß δ_0/δ ist. Die Verschiebung der Streifen erfolgt demnach nur dann mit dem Bilde mit, wenn $\delta_0 = \delta$ ist. Sonst ist die Bewegung der Streifen größer als die des Bildes: etwaige Unruhe des Objekts, wie das Szintillieren der Sterne, läßt sie fortgesetzt über das Bild hin und her huschen, wodurch natürlich die Beobachtung sehr erschwert wird.

Für die Intensitäten in den Maxima und Minima gelten also die Beziehungen

$$J_{\max} = 2C \int_{\alpha - \frac{d}{2}}^{\alpha + \frac{d}{2}} f(x_0) \cos^2 \mu \delta_0 x_0 \cdot dx_0,$$

$$J_{\min} = 2C \int_{\alpha - \frac{d}{2}}^{\alpha + \frac{d}{2}} f(x_0) \sin^2 \mu \delta_0 x_0 \cdot dx_0.$$

Durch Substitution von

$$x_0 = \alpha + \frac{d}{2} w_0; \quad dx_0 = \frac{d}{2} \cdot dw_0$$

und geringer Umformung nehmen die Integrale, bis auf einen konstanten Faktor, folgende Form an

$$J_{\max} = \int_{-1}^{+1} \varphi(w_0) \left[1 + \cos 2\mu \left((\delta_0 - \delta) \alpha + \frac{d}{2} \delta_0 w_0 \right) \right] dw_0,$$

$$J_{\min} = \int_{-1}^{+1} \varphi(w_0) \left[1 - \cos 2\mu \left((\delta_0 - \delta) \alpha + \frac{d}{2} \delta_0 w_0 \right) \right] dw_0.$$

oder

$$J_{\max}^{\min} = \int_{-1}^{+1} \varphi(w_0) dw_0 \pm \int_{-1}^{+1} \cos 2\mu (\delta - \delta_0) \alpha \cdot \varphi(w_0) \cos \mu \delta_0 dw_0 \cdot dw_0.$$

Bilden wir nun die Sichtbarkeit der Interferenzstreifen, so erhalten wir

$$V = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}} = \cos 2\mu (\delta_0 - \delta) \alpha \cdot \frac{\int_{-1}^{+1} \varphi(w_0) \cos \mu \delta_0 dw_0 \cdot dw_0}{\int_{-1}^{+1} \varphi(w_0) \cdot dw_0}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem Michelsons durch den Faktor $\cos 2\mu (\delta_0 - \delta) \alpha$, der dort gleich der Einheit ist. Michelson braucht auch den Einfluß einer seitlichen Verschiebung des Objekts nicht zu berücksichtigen, da seine Ableitungen sich nur auf den Fall $\delta = \delta_0$ beziehen. Bei den tatsächlich angewandten Interferometern ist dagegen δ_0 erheblich größer als δ . Hier bleibt daher der Einfluß von α bestehen, und eine Hin- und Herbewegung des Sternes durch Luftunruhe bewirkt, daß die Streifen nicht nur wie oben hin und her huschen, sondern außerdem ständig zwischen Verschwinden und bester Sichtbarkeit auf und ab schwanken. Nur für den Fall $V = 0$ — und gerade hierauf stellt Michelson durch Verschieben der äußeren Spiegel ein — geht die Abhängigkeit von α verloren. Die Streifen sind dann verschwunden und treten auch bei einer Bewegung des Sternes nicht wieder auf. Immerhin tritt zu der obenerwähnten Schwierigkeit eine neue, worunter natürlich die Genauigkeit der Messung leidet.

b) Umrandung und Helligkeitsverteilung des Objekts

Aus der hier abgeleiteten Sichtbarkeit läßt sich nun die Funktion $\varphi(w_0)$ bzw. $f(x_0)$ berechnen. Sie stellt, so wie sie in unserem Falle entstanden ist, die Umrandung des Objekts dar, von dem wir annahmen, daß es mit gleichförmig verteilter Helligkeit strahlt. Lassen wir diese Einschränkung unseres Ansatzes fallen und kehren zu einer beliebigen Helligkeitsverteilung $g(x_0, y_0)$ zurück, so lautet die Gleichung (3) des Interferenzbildes folgendermaßen

$$J = \int_0^{f(x_0)} g(x_0, y_0) dy_0 \int_{\alpha - \frac{d}{2}}^{\alpha + \frac{d}{2}} \left[\frac{\sin \mu a (x - x_0)}{\mu a (x - x_0)} \cdot \frac{\sin \mu b (y - y_0)}{\mu b (y - y_0)} \right]^2 \cdot \cos^2 \mu (\delta x - \delta_0 x_0) \cdot dx_0.$$

Die Integration über y_0 führt zu einer neuen Funktion $\Phi(x_0)$, die wir am besten in der Form des Produkts $\gamma(x_0) \cdot f(x_0)$ darstellen, und die etwa in Gleichung (3a) an die Stelle des einfachen $f(x_0)$ tritt. Dieses reduzierte Objekt setzt sich also aus dem eigentlichen $f(x_0)$ und einem die Intensitätsverteilung angegebenden Faktor $\gamma(x_0)$ zusammen. Das Beispiel der ungleichförmig beleuchteten Kreisscheibe möge dies erläutern. Mit Michelson und Pease (8) nehmen wir eine Intensitätsverteilung an in der Form

$$g(x_0, y_0) = \text{const} \left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 - x_0^2 - y_0^2 \right)^n.$$

Daraus folgt dann

$$\Phi = \text{const} \int_0^{\left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 - x_0^2 \right)^m} \left(\frac{d^2}{4} - x_0^2 - y_0^2 \right)^n dy_0 = \text{const} \cdot \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - x_0^2 \right]^{n+m}$$

$$\Phi = \gamma \cdot f = \text{const} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - x_0^2 \right]^n \cdot \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - x_0^2 \right]^m.$$

Den Verhältnissen auf Sternen wird der Wert $n = 0,4$ am meisten gerecht, so daß also bei $m = \frac{1}{2}$ (Kreisscheibe)

$$\Phi = \text{const} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - x_0^2 \right]^{0,9}.$$

Es läßt sich demnach, ausgehend von der eindeutigen Bestimmung, daß das Objekt eine Kreisscheibe sei, und der zweiten ebenso eindeutigen Bestimmung, daß die Helligkeitsverteilung auf dieser Kreisscheibe der oben festgelegten Bedingung mit dem Exponenten $n = 0,4$ genüge, die Sichtbarkeit der Interferenzstreifen berechnen. Umgekehrt kann wohl die Funktion Φ aus der Bildkurve gefunden werden. Aber sie kann nur in ihrer geschlossenen Form gefunden werden, die tatsächliche Größe der einzelnen Faktoren γ und f ist im allgemeinen nicht anzugeben. Lediglich die Voraussetzung einer ganz bestimmten Umrandung zum Beispiel, ermöglicht die Ermittlung der Intensitätsverteilung und damit die eindeutige Beschreibung des Objekts. Solche Voraussetzungen bedingen meistens eine erhebliche Ungenauigkeit der Messung. Bechmann (16) versucht bereits aus der Lage der Schnittpunkte der Sichtbarkeitskurven (Fig. 7) mit der Achse die Form von Ultramikronen zu erfassen, indem er den Exponenten m der obigen Gleichung bestimmt. Er übersieht dabei, daß die wesentliche Voraussetzung für eine solche Angabe die gleichmäßige Helligkeitsverteilung auf den Teilchen ist, eine Annahme, die gerade bei Ultramikronen auch nicht annähernd richtig ist. Eher ist es statthaft, aus anderen Erscheinungen und Eigentümlichkeiten der Ultramikronen ihre äußere Form zu bestimmen, und hieraus dann den Helligkeitsanteil $\gamma(x_0)$ zu ermitteln. Die Messung ergibt eben nur die Funktion Φ , und diese läßt sich willkürlich zusammensetzen. Eine Schar von solchen Objekten würde sich in unserem Beispiel ergeben, wenn die Summe der Exponenten n und m stets gleich 0,9 wäre. Es ist unmöglich, um zwei Extreme anzunehmen, zu entscheiden, ob das Objekt ein Scheibchen von der Form $f(x_0)$ mit der Helligkeit Eins oder ein Stäbchen mit der Helligkeitsverteilung $f(x_0)$ ist.

Die Frage, ob die Trennung der Funktion Φ in ihre beiden Bestandteile nur durch anderweitige Bestimmung des einen der beiden möglich ist, soll kurz gestreift werden. Wir können uns denken, daß das Objekt um die optische Achse des Interferometers gedreht werde. Dabei werden sich vorhandene Unsymmetrien dadurch zeigen, daß die Sichtbarkeit der Interferenzstreifen sich mit der Drehung ändert. Zu jedem

Azimet gehört eine bestimmte Sichtbarkeit und damit ein bestimmtes Ψ , zu jedem Ψ aber wieder eine Schar von $\gamma \cdot f$ -Werten. Aus diesem System von Gleichungen läßt sich dann γ und f bestimmen. Es ist naheliegend, dies nacheinander durch eine gleichzeitige Messung in allen Azimuten zu ersetzen, indem wir an Stelle der Spalte eine kreis- oder ringförmige Blende benutzen.

c) Berücksichtigung der Spaltbreite

In Gleichung (4) haben wir angenommen, daß die Breite der Spalte verschwindend klein sei. Das ist praktisch nicht der Fall. Im Gegenteil wird es oft notwendig sein, sie so groß wie möglich zu machen. Beschränken wir uns bei der Auswertung des Interferenzbildes auf den mittleren, hellsten Teil (9), (10), so können wir setzen

$$\frac{\sin \mu b (y - y_0)}{\mu b (y - y_0)} = 1.$$

Nehmen wir außerdem $\delta_0 = \delta$, so geht die Gleichung (3) über in

$$J = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} f(x_0) \left[\frac{\sin \mu a (x - x_0)}{\mu a (x - x_0)} \right]^2 \cos^2 \mu \delta (x - x_0) \cdot dx_0.$$

Wir schreiben

$$x_0 = \frac{d}{2} w_0; \quad \mu \delta d = \pi \cdot m; \quad \frac{a}{\delta} = p.$$

Dann wird bis auf einen konstanten Faktor

$$J = \int_{-1}^{+1} q(w_0) \left[\frac{\sin p \left(\mu \delta x - \frac{\pi}{2} m w_0 \right)}{p \left(\mu \delta x - \frac{\pi}{2} m w_0 \right)} \right]^2 \cos^2 \left(\mu \delta x - \frac{\pi}{2} m w_0 \right) \cdot dw_0.$$

Lösen wir $\frac{\sin^2 n}{n}$ in die Reihe auf

$$\frac{\sin^2 n}{n} = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2n)^{2\nu}}{(2\nu+2)!}$$

und nehmen $p = \frac{a}{\delta}$, das Verhältnis der Spaltbreite zu ihrem gegenseitigen Abstand, zwar als endlich aber doch so klein an,

daß die quadratischen und höheren Glieder der Reihe vernachlässigt werden können, so wird

$$J = \int_{-1}^{+1} \varphi(w_0) \left[1 - \frac{p^2}{3} \left(\mu \delta x - \frac{\pi}{2} m w_0 \right)^2 \right] \left[1 + \cos 2 \left(\mu \delta x - \frac{\pi}{2} m w_0 \right) \right] \cdot d w_0.$$

Führen wir die Integration aus und setzen

$$\int_0^1 w_0^{2n} \cdot \varphi(w_0) \cos \pi m w_0 \cdot d w_0 = \frac{\pi}{4} \mathfrak{A}_n$$

$$\int_0^1 w_0^n \cdot \varphi(w_0) \sin \pi m w_0 \cdot d w_0 = \frac{\pi}{4} B_n,$$

so lautet die Gleichung für das Interferenzbild

$$J = 1 - \frac{p^2}{3} \mu^2 \delta^2 x^2 = \frac{p^2}{48} m^2 \pi^2 + \mathfrak{A}_0 \left(1 - \frac{p^2}{3} \mu^2 \delta^2 x^2 \right) \cos 2 \mu \delta x,$$

$$- \mathfrak{A}_1 \cdot \pi^2 \frac{p^2}{12} m^2 \cdot \cos 2 \mu \delta x + B_1 \cdot \frac{p^2}{3} \delta \pi m x \cdot \sin 2 \mu \delta x.$$

Wir machen weiter zur Bedingung, daß zur Bestimmung der Sichtbarkeit nur die Maxima und Minima in der Nähe von $x \sim 0$ benutzt werden; so ist

$$J_{\max} = 1 - \frac{\pi^2 p^2 m^2}{48} + \mathfrak{A}_0 - \frac{\pi^2 p^2 m^2}{12} \mathfrak{A}_1,$$

$$J_{\min} = 1 - \frac{p^2 \pi^2}{12} - \frac{\pi^2 p^2 m^2}{48} - \mathfrak{A}_0 + \frac{p^2 \pi^2}{12} \mathfrak{A}_0 + \frac{\pi^2 p^2 m^2}{12} \mathfrak{A}_1,$$

und hieraus wieder

$$V = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}} = \frac{\mathfrak{A}_0 - \frac{\pi^2 p^2}{24} (\mathfrak{A}_0 + 2 m^2 \mathfrak{A}_1 - 1)}{1 - \frac{\pi^2 p^2}{24} \left(1 - \mathfrak{A}_0 + \frac{m^2}{2} \right)}.$$

Der Verlauf von V stellt die Kurve V_p in der Tafel dar für den Wert $p = 0,28$. Ihr Schnittpunkt mit der m/π Achse wird von Sp. Jones angegeben. Es ist nämlich

$$m = 1,22 (1 + 0,765 p^2).$$

Für $m = 0$ wird $\mathfrak{A}_0 = 1$ und damit auch $V = 1$.

2. Pokrowski

Ein schematisches Bild des Interferometers von Pokrowski gibt Fig. 3. Das Licht eines Sternes fällt in zwei Bündeln auf die Spiegel S_1 und S_4 und wird von dort über zwei innere Spiegel S_2 und S_3 parallel der ursprünglichen Richtung weitergeleitet. Beide Bündel treten dann durch zwei Platten, deren optische Achsen so orientiert sind, daß die heraustretenden Strahlen rechtwinklig zueinander polarisiert sind. Ein großer Kalkspatrhomboeder bringt die beiden bisher nebeneinander

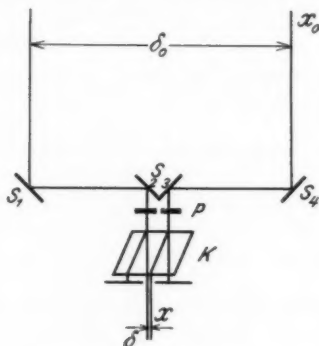


Fig. 3

hergehenden Bündel zur Deckung. Da beide Strahlen kohärent sind, werden sie im Brennpunkt des Fernrohres interferieren, und da die Vektoren senkrecht zueinanderstehen, beobachten wir elliptisches Licht. Jedem Punkt der Sternoberfläche ist eine Ellipse mit einem bestimmten Achsenverhältnis zugeordnet, die sich alle im Brennpunkt übereinander lagern. Da ihre Achsen, gleiche Amplituden der interferierenden Strahlen vorausgesetzt, alle denselben Winkel von 45° mit der Zeichenebene bilden, lassen sich die Summen beider mit Hilfe eines Wollaston-Prismas trennen. Das Verhältnis der Summen ist dann nach Pokrowski ein Maß für den Durchmesser des Sternes. Die Messung des Durchmessers läuft demnach auf eine Photometrierung zweier Sternbildchen verschiedener Helligkeit hinaus. Grenzen sind der Methode also nur durch zu geringe Helligkeit

der schwächeren Komponente gesteckt. Pokrowski zeigt, daß der Durchmesser eines Sternes wie der Sirius noch $0,001''$ groß sein darf, um noch eben gemessen werden zu können.

a) Beugungstheoretische Ableitung

Die Ähnlichkeit mit dem Interferometer von Michelson ist offenbar. Wir beginnen daher auch ganz analog.

Zwei senkrecht zueinander polarisierte, parallele Strahlen mit der gleichen Amplitude \mathfrak{A} und der Phasendifferenz Δ setzen sich zu elliptischem Licht zusammen, deren große bzw. kleine Achse durch die Beziehungen gegeben sind.

$$A_{\text{maj}} = \sqrt{2} \cdot \mathfrak{A} \cos \mu \Delta$$

$$\text{worin } \mu = \frac{\pi}{\lambda}$$

$$A_{\text{min}} = \sqrt{2} \cdot \mathfrak{A} \sin \mu \Delta.$$

\mathfrak{A} und Δ sind gleich den bereits oben gefundenen Werten, so daß wir die Gleichungen für J_{maj} und J_{min} sofort hinschreiben können.

$$J_{\text{maj}} = \text{const} \int_0^{f(x_0)} dy_0 \int_{\alpha - \frac{d}{2}}^{\alpha + \frac{d}{2}} \left[\frac{\sin \mu a (x - x_0)}{\mu a (x - x_0)} \cdot \frac{\sin \mu b (y - y_0)}{\mu b (y - y_0)} \right]^2 \\ \cdot 2 \cos^2 \mu (\delta x - \delta_0 x_0) \cdot dx_0$$

$$J_{\text{min}} = \text{const} \int_0^{f(x_0)} dy_0 \int_{\alpha - \frac{d}{2}}^{\alpha + \frac{d}{2}} \left[\frac{\sin \mu a (x - x_0)}{\mu a (x - x_0)} \cdot \frac{\sin \mu b (y - y_0)}{\mu b (y - y_0)} \right]^2 \\ \cdot 2 \sin^2 \mu (\delta x - \delta_0 x_0) \cdot dx_0.$$

Nehmen wir auch hier wieder die Spalte als so klein an, daß ihre Breite gegenüber dem Abstände vernachlässigt werden kann und substituieren in derselben Weise wie oben

$$x_0 = \alpha + \frac{d}{2} w_0; \quad dx_0 = \frac{d}{2} dw_0,$$

so lauten die Gleichungen bis auf einen konstanten Faktor

$$J_{\text{maj}} = \int_0^1 \varphi(w_0) dw_0 \pm \cos 2 \mu (\delta x - \delta_0 \alpha) \int_0^1 \varphi(w_0) \cos^* \mu d \delta_0 w_0 \cdot dw_0.$$

An Hand dieser Gleichung ist es leicht, sich die etwas verwickelten Verhältnisse im Interferenzbild zu veranschaulichen. Setzen wir zunächst einen punktförmigen Stern genau in der optischen Achse liegend voraus. Der Winkel α ist dann gleich Null. Hierfür wird

$$J_{\min}^{\max} = 1 \pm \cos 2\mu \delta x.$$

Zeichnen wir nun auf einer X-Achse an jeder Stelle x die dazugehörige Ellipse, so wie sie durch diese Beziehung bedingt ist. Dann ist in der optischen Achse die Ellipse zu linear polarisiertem Licht zusammengeschrumpft, nach rechts und links wächst das Achsenverhältnis bis zur zirkularen Polarisation, um dann wieder abzunehmen, wieder zuzunehmen und so periodisch fortzufahren. Die Länge einer Periode ist allein von δ , dem Abstand der inneren Strahlenbündel, abhängig: ist im besonderen δ sehr klein, so wird sie so groß, daß das linear polarisierte Licht praktisch über das ganze Gesichtsfeld ausgebreitet ist. Lassen wir jetzt unseren gedachten Stern aus der optischen Achse herauswandern, so wird das linear polarisierte Licht zu elliptisch polarisiertem. Das ganze Gesichtsfeld durchläuft jetzt einheitlich die Skala nacheinander, die vorher bei endlichem δ über die X-Achse nebeneinander verteilt war.

Ganz ähnlich ist natürlich der Vorgang bei einem ausgedehnten Stern für die „Sichtbarkeit“. Nach Gleichung (7) ist

$$V = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}} = \cos 2\mu (\delta x - \delta_0 \alpha) \frac{\int_0^{+1} q(w_0) \cos \mu d \delta_0 w_0 \cdot d w_0}{\int_0^{+1} q(w_0) \cdot d w_0}.$$

b) Die Einwände Eddingtons

Die Einwände, die A. S. Eddington (12) gegen die Anordnung von Pokrowski zu machen hat, sind zweierlei Art. Das Pokrowskiinterferometer bedeute lediglich eine Komplikation des Apparates von Michelson, sagt Eddington; den Interferenzstreifen dort entsprächen hier die Ellipsen mit wechselndem Achsenverhältnis. Dies wäre, wie wir eben gesehen haben, in der Tat der Fall, wenn die beiden inneren Strahlen einen endlichen Abstand δ hätten. Aber Pokrowski umgeht ja gerade diese Schwierigkeit, indem er den Kalkspat

in den Strahlengang einschaltet und durch ihn beide Bündel zur Deckung bringt. Dadurch wird $\delta = 0$, und die gewünschte Unabhängigkeit von x erreicht. Jetzt könnten wir ohne weiteres die von Pokrowski vorgeschlagene Meßmethode der Trennung der Achsensummen in zwei Sternbildchen mit verschiedener Helligkeit anwenden. Pokrowski übersieht aber, daß gerade durch diesen Kunstgriff die optische Achse des Interferometers eine bevorzugte Achse wird, die die Verwendbarkeit in vielen Fällen in Frage stellt. Hier besteht der Einwand von Eddington zu Recht, wenn er sagt, daß jede seitliche Verschiebung des Sternes eine Änderung des Interferenzbildes bewirke. Die Gleichung für V zeigt, daß auch beim Verschwinden von δ und x der Einfluß von α , das ist die seitliche Verschiebung des Sternes aus der optischen Achse heraus, erhalten bleibt. Der Einfluß ist sogar von derselben Größe wie der des Sterndurchmessers d , d. h. eine seitliche Verschiebung des Sternes um seinen eigenen Durchmesser täuscht dem Beobachter einen Stern von doppelter Größe vor. Das einzige Mittel, die Abhängigkeit von α zu umgehen, ist wie bei Michelson $V = 0$ zu machen. Damit sind aber auch die Vorteile des Polarisationsinterferometers — feste Spiegel und variable Sichtbarkeit — aufgegeben.

Die Anwendung in der Astronomie kommt also nach dem Gesagten nicht in Frage. Bei einem Spiegelabstand $\delta = 100$ cm wird die Sichtbarkeit $V = 0$, wenn der Winkel α noch nicht $\frac{1}{10}$ Bogensekunde erreicht hat. Die Bewegungen des Sternes infolge Luftunruhe überschreitet aber das Zehnfache dieses Wertes.

Eine Verwendung zur Messung von Ultramikronen ist jedoch denkbar. Da die Objekte sich hier meistens festhalten lassen, besteht die Möglichkeit, sie mit Hilfe einer äußerst feinen Schraube genau in die optische Achse zu schieben. Das zu untersuchende Teilchen liege außerhalb der Achse, der Wert von $\cos 2\mu\delta_0\alpha$ etwa bei Null. Nun werde das Objekt verschoben: $\cos 2\mu\delta_0\alpha$ wächst dabei bis auf Eins. Die Sichtbarkeit hat dann ihren größten Wert erreicht, der also durch das Objekt allein bestimmt ist. Ein Weiterschieben läßt den Wert wieder sinken. Daraus ergibt sich die Meßmethode ohne weiteres.

c) Umformung auf den Ausdruck von Pokrowski

Die von uns abgeleitete Gleichung für V weicht in ihrer äußeren Form von der Schreibweise Pokrowskis erheblich ab. Wir wollen sie daher umformen. Setzen wir mit Pokrowski $\delta = 0$ und $\varphi(w_0) = \text{const} (1 - w_0^2)^{\frac{1}{2}}$, so lauten die Gleichungen (7) bis auf den konstanten Faktor:

$$J_{\min}^{\max} = 1 \pm \cos 2\mu \delta_0 \alpha \cdot \frac{4}{\pi} \int_0^1 (1 - w_0^2)^{\frac{1}{2}} \cos \mu d \delta_0 w_0 \cdot d x_0.$$

Ganz allgemein gilt aus den Besselschen Funktionen:

$$J_{\lambda}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} e^{ixt} (1 - t^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} dt.$$

Daraus folgt also für

$$\frac{4}{\pi} \int_0^1 (1 - w_0^2)^{\frac{1}{2}} \cos \mu d \delta_0 w_0 \cdot d w_0 = 2 \cdot \frac{J_1(\mu \delta_0 d)}{\mu \delta_0 d}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber weiter nichts, als die von Pokrowski mit $S(\beta)$ bezeichnete Airysche Reihe. Denn da

$$J_1(\mu \delta_0 d) = \frac{\mu \delta_0 d}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{n \delta_0 d}{2}\right)^{2n}$$

und

$$n!(n+1)! = (n)!^2 (n+1) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\mu \delta_0 d}{2}$$

ist, wird

$$2 \cdot \frac{J_1(\mu \delta_0 d)}{\mu \delta_0 d} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{\beta^n}{n!}\right)^2.$$

Dieser letzte Ausdruck ist die Summenformel für die Airysche Reihe, so daß wir jetzt für das Verhältnis der Achsen schreiben können:

$$i = \frac{J_{\min}}{J_{\max}} = \frac{1 - \cos 2\mu \delta_0 \alpha \cdot S(\beta)}{1 + \cos 2\mu \delta_0 \alpha \cdot S(\beta)}.$$

Setzen wir den Wert, den Pokrowski errechnet, daneben

$$t = \frac{1 - S(\beta)}{1 + S(\beta)},$$

so finden wir wieder den Unterschied in dem Faktor $\cos 2\mu\delta_0\alpha$, der eben bei Pokrowski gar nicht in die Erscheinung tritt, da bei ihm der Stern als in der optischen Achse liegend vorausgesetzt wird, $\alpha = 0$ ist.

III. Ausgeführte Messung von Spaltbreiten aus dem Interferenzbild

Die Vorteile, die die Methode von Pokrowski gegenüber der Michelsonschen gebracht hätte, wären immerhin so bedeutend gewesen, daß die Frage berechtigt erscheint, ob nicht dasselbe auf anderem Wege zu erreichen ist. Das Wesentliche bei Pokrowski ist das Festhalten der Spalte und die Auswertung der jeweiligen „Sichtbarkeit“. Es ist klar, daß in derselben Weise auch die Anordnung von Michelson angewandt werden kann. Michelson selbst verschiebt bekanntlich die äußeren Spiegel seines Interferometers so lange, bis die Interferenzstreifen verschwinden, die Sichtbarkeit V in Gleichung (5) also gleich Null wird. Lassen wir aber δ und δ_0 , die gegenseitigen Abstände der Spiegel, konstant und beobachten ein Objekt $\varphi(w_0)$, so gehört zu diesem Objekt eine ganz bestimmte Sichtbarkeit V . Rückwärts läßt sich also aus V unter Beachtung der früheren Erwägungen das Objekt berechnen. Allerdings zeigt Gleichung (5) auch zugleich eine Einschränkung. Um den störenden Einfluß des Verschiebungswinkels α zu beseitigen, müssen wir $\delta = \delta_0$ wählen, weil dann $\cos 2\mu(\delta - \delta_0)\alpha = 1$ wird. (Bei Pokrowski war dies nicht möglich, da dort stets $\delta = 0$ sein muß.) Damit geben wir zwar einen wesentlichen Vorzug der Michelsonschen Methode auf, den Abstand der äußeren Spiegel beliebig über den Rand des benutzten Objektivs ausdehnen zu können. Auf astronomische Messungen wird daher das Verfahren wohl wenig Anwendung finden können. Anders dagegen bei Messungen mit dem Mikroskop, bei denen der Spaltabstand δ sowieso durch die Größe der Apertur begrenzt ist (16). Da für die „Sichtbarkeit“ keine theoretische Grenze besteht, hängt

das Auflösungsvermögen des Interferometers lediglich von der praktischen Durchführbarkeit der Messung von V ab.

Im folgenden soll eine Versuchsreihe beschrieben werden, aus der die Brauchbarkeit des Verfahrens hervorgeht.

1. Versuchsanordnung

Die Versuchsanordnung mußte so geschaffen sein, daß alle in die Gleichung (5) eingehenden Teile unmittelbar zu kontrollieren waren. Daher wurde von der Anwendung eines

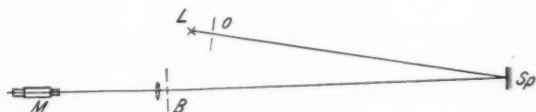


Fig. 4

Mikroskops abgesehen; vielmehr wurden weit entfernte Objekte mit einem Fernrohr beobachtet. Die Fig. 4 zeigt die Anordnung.

Die Lichtquelle L in Verbindung mit dem Spalt O bilden das Objekt. Um eine möglichst eindeutige Wellenlänge in die Rechnung einsetzen zu können, diente eine Quecksilberlampe als *Lichtquelle*, vor die ein Didymnitratfilter gesetzt war, das die grüne Linie $\lambda = 5460$ fast monochromatisch und lichtstark hindurch ließ. Die Weite des Spaltes O konnte stetig verändert werden. Von ihm war der *Doppelspalt* B 27,00 m entfernt. Da für einen derartigen Abstand kein Raum genügender Länge zur Verfügung stand, wurden die 27 m durch einen Spiegel Sp auf die Hälfte gebracht. Der Objektspalt kam dadurch in unmittelbare Nähe des Fernrohrs, wodurch seine Bedienung wesentlich erleichtert wurde. Die durch die Lichtquelle entstehende Luftunruhe ließ sich leicht durch Schirme unschädlich machen. Der ganze Strahlengang war in ein genügend weites Rohr verlegt. Trotzdem traten dann und wann Wärmeströmungen auf, die sich jedoch nicht, wie man erwarten sollte, durch Flimmern oder Wallen der Bilder bemerkbar machten, sondern die die Bewegung der Bilder so langsam und gleichmäßig erfolgen ließ, daß sie erst durch

Vergleich mit Marken nach längerer Beobachtung wahrzunehmen waren. Störende Reflexe im Rohr konnte durch geeignet angebrachte Blenden beseitigt werden. Der Doppelspalt B war unmittelbar vor dem Fernrohrobjektiv angebracht. Seine Herstellung geschah in folgender Weise. In eine etwa 2–3 mm starke Messingplatte wurden mit einem Stirnfräser zwei keilförmige Nuten so tief eingefräst, daß eben ein feiner Grad aus der Rückseite hervorgedrückt wurde. Durch diese tiefsten Stellen der Nuten wurden dann mit einer Kreissäge die Spalte in gewünschter Breite eingeschnitten. Auf diese Weise gelang es ohne Schwierigkeiten, Doppelspalte von 1 mm gegenseitigem Abstand und 0,1 mm Breite auf 0,01 mm genau herzustellen. Das Fernrohr F hatte eine Brennweite von 1 m. Die Bilder wurden durch ein Horizontalmikroskop mit etwa 40facher Vergrößerung betrachtet. Für photographische Aufnahmen konnte hinter das Mikroskop eine Kamera gesetzt werden.

2. Messung

a) Photometrierung

Das Interferenzbild ist ein Band, das von zunächst verwaschenen Streifen durchzogen ist, die aber immer intensiver und deutlicher werden, je enger der Objektspalt gemacht wird. Zu jeder Spaltbreite gehört die Sichtbarkeit V . Da wir photometrisch am leichtesten das Intensitätsverhältnis $\frac{J_{\min}}{J_{\max}}$ messen können, werden wir die Sichtbarkeit jedesmal aus diesem errechnen. Es ist:

$$V = \frac{1 - i}{1 + i}; \quad i = \frac{J_{\min}}{J_{\max}}.$$

Visuell

Die Photometrierung wurde zuerst visuell mit einem der bekannten Glühfadenpyrometer versucht. Jedoch ohne Erfolg, weil die Farben des Bildes und des Fadens selbst bei vorübergehender Verwendung einer Wolframbogenlampe an Stelle der Quecksilberlampe zu verschieden waren, um einen auch nur annähernd genauen Vergleich der Helligkeiten zu ge-

statten. Die Vergleichslichtquelle mußte von derselben Farbe wie das Bild und überdies sehr schmal sein, um eine unnötig starke Vergrößerung der an und für sich schon lichtschwachen Interferenzbilder zu vermeiden. Am geeignetsten schien dazu der Faden eines Okularschraubenmikrometers, der von der Seite her mit demselben Licht beleuchtet wurde, das zur Spaltbeleuchtung diente. Der in das Mikrometer eintretende Strahl konnte durch zwei gegeneinander drehbare Nikols meßbar geschwächt werden. Aber auch diese Anordnung genügte nicht den Anforderungen, da der Faden in keinem Falle zum gleichmäßigen Leuchten zu bringen war. Mattätzen des Fadens oder das Einätzen eines Striches in eine Glasplatte, die in das Mikrometer eingesetzt wurde, brachte keine wesentliche Verbesserung.

Photographisch

So blieb als einzige Möglichkeit die Herstellung eines Photogramms und seine nachträgliche Auswertung. Eine gewisse Schwierigkeit bestand hier in der Wahl der photographischen Platten. Da ausschließlich die grüne Quecksilberlinie als Lichtquelle dienen konnte, mußte die Platte für diesen Bereich genügend empfindlich sein. Dazu kam, daß die Belichtungszeit, um Fehler durch Luftunruhe und Erschütterungen auf ein Minimum herabzudrücken, bei überdies sehr lichtschwachen Bildern möglichst kurz sein sollte. Die ersten Versuche wurden mit der Agfaplatte „Andresa“ ausgeführt, die infolge ihrer hohen Allgemeinempfindlichkeit am besten geeignet schien. Leider neigt sie jedoch zur Bildung größerer Kornklumpen, die die Photometrierung unmöglich machen. Auf Anraten der Agfa wurden dann die Versuche mit „Agfa Aerochrom“ fortgesetzt. Ihre Empfindlichkeit ist zwar etwas geringer, dafür das Korn aber erheblich kleiner und beständiger. Außerdem ist sie unempfindlich gegen Unregelmäßigkeiten des Entwicklers; sie hat eine sehr steile Gradation bei kleinem Schwellwert. Sämtliche zur Messung benutzten Aufnahmen sind mit dieser Platte gemacht worden.

Die Auswertung geschah in der Weise, daß die Schwärzungen der Interferenzstreifen an die einer in bekannte Stufen unterteilte Intensitätstreppe angeschlossen wurden. Um den

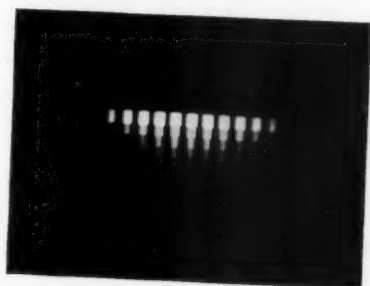


Fig. 5

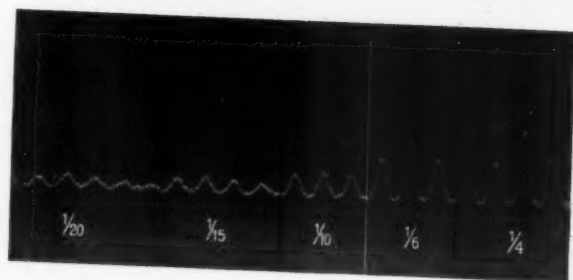
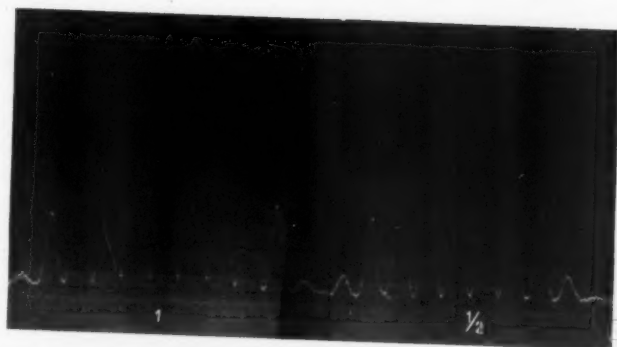


Fig. 6

Einfluß der von Platte zu Platte wechselnden Belichtungszeiten, die Verschiedenheiten des Entwicklers, die übrigens auch bei Standentwicklung auftraten, und der einzelnen Plattenlieferungen auszuschalten, wurde die Intensitätstreppe zugleich mit dem Interferenzbild aufgenommen, indem vor dem Objektspalt ein Stufensektor rotierte. Der Spalt war dadurch gewissermaßen in eine Reihe kurzer Spalte von gleicher Breite mit verschiedener Helligkeit aufgeteilt. Die Abstufung geschah nicht in der üblichen quadratischen Form, sondern, um die Punkte vorteilhafter über die Schwärzungskurve zu verteilen, in der Reihenfolge

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128}.$$

Fig. 5 zeigt eine derartige Aufnahme. Die senkrechten, verwaschenen Streifen sind die Interferenzstreifen. In horizontaler Richtung verlaufen die Intensitätsstufen, die, je geringer ihre Intensität, um so kürzer werden, weil die Enden unter den Schwellwert der Platte sinken.

Die Vermessung der Platten geschah auf dem Registrierphotometer der Einsteinstiftung in Potsdam und später auf einem Instrument der Firma C. Zeiss in Jena. Beide Photometer stimmten, wie Vergleichsmessungen zeigten, in den Resultaten überein.

Der Gang der Photometrierung war folgender. Die einzelnen Stufen in horizontaler Richtung wurden hintereinander registriert. Jede Kurve gibt ein Bild der Interferenzerscheinung (Fig. 6).

Die Intensitäten der mittleren Maxima verhalten sich wie die Stufen. Graphisch aufgetragen ergeben sie die Schwärzungskurve, aus der das gesuchte Intensitätsverhältnis durch Eintragen der entsprechenden Minimawerte ermittelt wird. Meist konnte nur die Stufe mit der Intensität 1 ausgewertet werden, da bereits von der Stufe 1—2 ab die Minima unter dem Schwellwert der Platte lagen.

b) Auswertung

Zur Auswertung der Messungen müssen wir zunächst die oben abgeleitete Gleichung (5) der Sichtbarkeit für unseren besonderen Fall ausrechnen. Für den rechteckigen Spalt ist

$\varphi(w_0)$ eine Konstante, die herausfällt. Da durch die Versuchsbedingungen $\delta = \delta_0$ ist, nimmt die Gleichung (5) folgende Gestalt an.

$$V = \int_0^1 \cos \mu \delta_0 w_0 \cdot d w_0 = \frac{\sin \mu \delta_0 d}{\mu \delta_0 d} = \frac{\sin \pi m}{\pi m}$$

wenn wir $\mu \delta_0 d = \pi m$ setzen.

Zum Vergleich sei hier noch der Fall angeführt, daß das Objekt eine gleichförmig leuchtende Kreisscheibe ist:

$$\varphi(w_0) = \text{const} (1 - w_0^2)^{1/2}.$$

Aus der Beziehung (8) folgt dann für Gleichung (5)

$$V = 2 \cdot \frac{J_1(\pi m)}{\pi m}.$$

Es ist also die Breite des Spaltes

$$d = \frac{\pi m}{\mu \delta_0} = m \cdot \frac{\lambda}{\delta}.$$

Zur Berechnung des Parameters m für den jeweiligen Fall kann man V in eine Reihe auflösen und diese nach dem quadratischen Gliede abrechnen, wie es Pokrowski z. B. getan hat. In der Fig. 7 sind die dann entstehenden Parabeln (---) gezeichnet. Sie weichen von den vollständig berechneten, in der Fig. 7 ausgezogenen Kurven so erheblich ab, daß die Reihendarstellung für eine Auswertung nicht in Frage kam. Es wurden daher die m -Werte immer der Zeichnung entnommen. Die Genauigkeit einer solchen graphischen Methode ist bei einiger Sorgfalt vollauf genügend. Als Abszisse ist m selbst aufgetragen, während die Ordinate in V und i geteilt ist. Die Kurven zeigen uns hier noch einmal, daß die untere Grenze des m und damit der Auflösung lediglich durch die Unmöglichkeit gesetzt ist, praktisch beliebig große Intensitätsverhältnisse messen zu können. Die vom Verfasser gemessene kleinste Spaltbreite ist $1/5$ der Breite, wie sie nach der Methode von Michelson bei gleichem Doppelspaltabstand δ hätte gemessen werden können.

Bei einer Gruppe von Messungen war es notwendig, die Breite a der beiden Spalte im Doppelspalt zu berücksichtigen. In Gleichung (6) hatten wir die Sichtbarkeit für diesen Fall

für ein beliebiges Objekt berechnet. Setzen wir nun in die Integrale A_0 und A_1 den Ausdruck für unseren Objektspalt

$$\varphi(w_0) = \text{const}$$

ein, so erhalten wir für V in Abhängigkeit $p = a/\delta$ eine Kurvenschar, die im Punkte $V = 1$ für $m = 0$ ihren Anfang nimmt, und die die m -Achse in den Stellen

$$m = 1 + 0,63 p^2$$

schneidet.

Die Abweichungen von den Werten, wie sie bei Verschwinden der Spaltbreite erhalten werden, machen sich erst

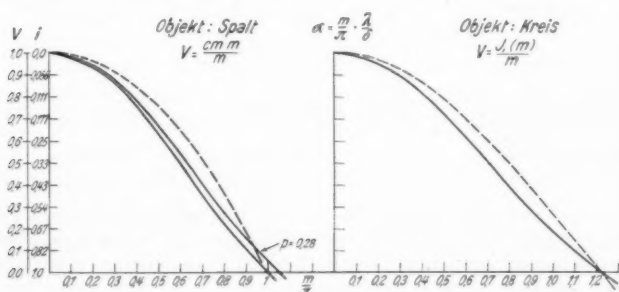


Fig. 7

störend bemerkbar, wenn $\frac{a}{\delta} > \frac{1}{5}$ ist, da dann die Fehler 2% übersteigen. Bei unseren Messungen war a/δ im allgemeinen $\frac{1}{11}$ und $\frac{1}{7}$. Nur in einer Reihe sind die Spaltbreiten so gewählt worden, daß $p = 0,28$ war. Hierfür ist die V -Kurve nach Gleichung (6) in die Fig. 7 eingetragen worden.

Die Ergebnisse der Messungen sind in der Tabelle zusammengestellt. Neben dem Namen der Platte werden zunächst die Masse des jeweils benutzten Doppelspaltcs angegeben, a die Breite jedes einzelnen, δ der gegenseitige Abstand ihrer Mitten. Hieran schließen sich das Intensitätsverhältnis $i = \frac{J_{\min}}{J_{\max}}$, daß aus der für jede Platte gezeichneten Schwärzungskurve entnommen ist, und die daraus berechnete Sichtbarkeit

$$V = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}}.$$

Platte Aerochrom	Doppelspalt mm		i	V	m	α mm		Bemerkungen	Grenze nach Michelson
	δ	a				gefunden	direkt gemessen		
6,2 1,0	3,30	0,30	0,09	0,837	0,34	1,4	1,0	Fehlerhaft durch Lichthof	4,3 mm
6,2 1,4			0,15	0,74	0,41	1,76	1,4		
8,2 1,0 45			0,08	0,852	0,30	1,3	1,0		
8,2 1,0 60	3,40	0,40	0,065	0,88	0,27	1,16	1,0	Lichthof frei ↓	4,3 mm
11,2 1,0			0,056	0,895	0,25	1,07	1,0		
18,2 1,0			0,055	0,897	0,24	1,03	1,01		
25,2 0,8	3,40	0,50	0,031	0,94	0,19	0,76	0,8	Nachbareffekt	4,2 mm
27,2 1,0 0,5			0,05	0,905	0,235	0,98	1,0		
25,2 1,0 0,5			< 0,05			< 0,98	1,0		
27,2 1,48 0,5	3,60		0,11	0,90	0,36	1,50	1,48	Stufe $1 \frac{1}{2}$	2,9 mm
27,2 2,0 0,5			0,180	0,69	0,46	1,93	1,95		
28,2 2,5 0,5			0,185	0,69	0,46	1,93	1,95		
28,2 2,5 0,5	3,60	1,0	0,33	0,50	0,60	2,50	2,5	Nachbareffekt	2,9 mm
25,2 1,0 1,0			0,31	0,525	0,89	2,46	2,5		
25,2 1,5 1,0			0,050	0,91	0,25	0,98	1,0		
27,2 2,0 1,0	3,60		0,125	0,78	0,40	1,58	1,5	Stufe $1 \frac{1}{3}$	2,9 mm
28,2 2,5 1,0			0,105	0,81	0,35	1,5	1,5		
27,2 2,0 1,0			0,15	0,74	0,445	1,75	2,0		
28,2 2,5 1,0	3,60		0,34	0,505	0,635	2,50	2,5	Nachbareffekt	2,9 mm
27,2 2,0 1,0			0,335	0,51	0,63	2,48	2,5		
28,2 2,5 1,0			0,335	0,51	0,63	2,48	2,5		

Aus letzterer ist der Parameter m graphisch (Fig. 7) gewonnen. Unter d sind die Breiten des Objektpaltes angegeben: links wie sie interferometrisch, rechts wie sie direkt mit einer Spaltlehre gemessen wurden. In der letzten Kolonne stehen die Objektpaltbreiten, für die nach Michelson bei den gegebenen Doppelspaltabständen δ die Interferenzstreifen verschwinden würden. In der Tabelle sind absichtlich zur exakten Messung ungeeignete Platten aufgenommen, um die Einwirkungen von Fehlern zu zeigen.

3. Fehler

Die Fehler, die auftreten können, liegen vor allem auf photographischem Gebiet. Da in den Interferenzbildern Minima und Maxima mit großen Intensitätsunterschieden dicht nebeneinander liegen, machen sich *Lichthöfe* sehr geltend. Das durch die lichtempfindliche Schicht hindurchfallende Licht wird zwischen den Glasoberflächen der Platte hin und her reflektiert und schwärzt die Minima stärker, als ihnen interferometrisch zukommt.

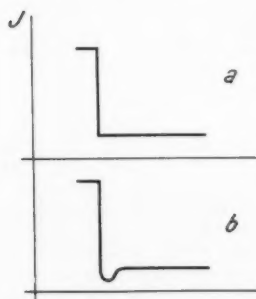


Fig 8

Die Sichtbarkeit der Streifen erscheint infolgedessen zu gering, das Objekt zu groß, wie die ersten drei Zeilen der Tabelle deutlich zeigen.

Abhilfe läßt sich leicht schaffen, indem auf die Rückseite der Platte eine lichtabsorbierende Farbschicht aufgetragen wird. Das ist bei allen sonstigen Aufnahmen mit „Solarin“, einem eigens dazu hergestellten roten Lack, geschehen.

Ein zweiter Fehler, der im Gegensatz zum ersten zu kleine Objekte vortäuscht, ist der von Eberhardt gefundene *Nachbareffekt*. In der Nachbarschaft der Grenze starker Intensitätsunterschiede entziehen die Gebiete stärkerer Schwärzung den schwächeren den Entwickler, so daß deren Intensität nach der Grenze zu geringer wird, als sie eigentlich sein dürfte. In Fig. 8 stellt a) den zu erwartenden Verlauf der Schwärzung, b) den durch Nachbareffekt tatsächlich hervor-

ein
sic
stu
Eff
ent

gerufenen dar. Durch den Effekt werden die Minima unserer Interferenzbilder zu tief. Besonders deutlich zeigt dies die Platte (25,2, 1,0, 0,5). Das mittlere Minimum, das theoretisch

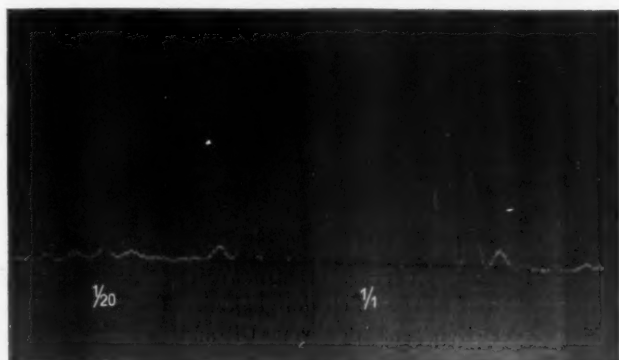


Fig. 9



Fig. 10

einem Intensitätsverhältnis von $\frac{1}{20}$ entsprechen soll, erhebt sich überhaupt nicht aus dem Plattengrund, obgleich die Meßstufe $\frac{1}{20}$ eine Höhe von 2 mm hat (Fig. 9). Man umgeht den Effekt am sichersten durch Anwendung einer langsamen Standentwicklung.

Eine andere Art von Fehlern entsteht durch ungleichmäßige Beleuchtung des Objektpaltes. Da jeder Ungleichmäßigkeit in der Intensitätsverteilung im Spalt eine andere Funktion $\Phi(\omega_0)$ angehört, so muß der Fehler sich durch Abweichungen von der normalen Intensitätsverteilung im Bild bemerkbar machen. Ein Beispiel für einseitige Beleuchtung gibt Fig. 10.

Der mittlere Fehler unserer Messungen beträgt etwa 2,7 Proz., wenn wir die als mangelhaft besonders gekennzeichneten Werte fortlassen.

IV. Bemerkungen zur Anwendung auf das Mikroskop

Die Anwendung der beschriebenen Methode auf das Mikroskop stößt auf gewisse Schwierigkeiten. Zunächst ist hier die Frage der Kohärenz des von Ultramikronen diffus gebeugten und reflektierten Lichts zu lösen; denn danach richtet es sich, ob der Kern der Integralgleichung wie in unserem Falle oder das ganze Integral quadratisch wird. Ein Weg zur Lösung ist vielleicht gerade das Doppelspaltinterferometer, da sich hier die Bilder von Selbstleuchtern und Nichtselbstleuchtern charakteristisch (15) unterscheiden. Eine andere Schwierigkeit erwächst aus der Unmöglichkeit, das Objekt gleichmäßig über seine Oberfläche zu beleuchten. Wir müssen daher wenigstens darauf sehen, daß wir die Intensitätsverteilung auf dem Objekt möglichst genau durch eine Funktion darstellen können — $g(x_0, y_0)$ in Gleichung (2). Die achsensymmetrische Beleuchtung durch einen Dunkelfeldkondensor wird deshalb einer seitlichen, etwa wie bei dem Ultramikroskop nach Zsigmondy-Siedentopf oder einer Azimutblende, vorzuziehen sein. Mit dieser Intensitätsverteilung auf der Oberfläche des Objekts dürfen nicht die Intensitätsgleichungen und Kurven verwechselt werden, die Blumer (18) angibt und die die Verteilung des von Ultrateilchen abgebeugten Lichtes rund um das Teilchen herum darstellen. Jeder vom Teilchen ausgezogene Radiusvektor ist also die Gesamtintensität der Oberfläche gesehen aus der Richtung des Vektors; sie spielt natürlich auch in unseren Versuchen eine Rolle. Die Abhängigkeit von der Beleuchtung ist bei der Anordnung von

U. Gerhardt nicht von solcher Bedeutung. Indem Gerhardt in seinen Dunkelfeldkondensor eine Azimutblende einlegt, wird das Teilchen nur in zwei an der Peripherie liegenden Bereichen beleuchtet, die als die Komponenten eines Doppelsterns aufzufassen sind. Zur Messung ihres gegenseitigen Abstandes genügt aber die Kenntnis der Lage der Maxima: diese ist, wie wir oben gesehen haben, unabhängig von der Intensitätsverteilung. Diesem Vorzuge steht aber der Nachteil gegenüber, daß dem Auflösungsvermögen des Interferometers durch die Apertur (16) des Objektivs eine nicht zu überschreitende Grenze gesetzt ist. Bei dem oben beschriebenen Verfahren ist das nicht der Fall. Das Auflösungsvermögen ist dort theoretisch unbegrenzt, praktisch nur durch die Photometrieverfahren beschränkt. Ein weiterer Vorteil der Versuchsanordnung liegt in der Verwendung fester Doppelspalte, die sich etwa in den Schieber eines Abbeschen Diffraktionsapparates einlegen lassen. Die Benutzung besonderer, auf unendlich korrigierter Objektive in Verbindung mit einem Fernrohr an Stelle des gewöhnlichen Okulars gestaltet nicht nur die Versuchsbedingungen sauberer, sondern gestattet auch die Aufnahme zahlreicher Objekte gleichzeitig zum Zwecke späterer Auswertung. In dieser Richtung angestellte Versuche sind noch zu keinem Abschluß gekommen.

V. Zusammenfassung

1. Die optische Abbildung ist ganz allgemein in der Form einer Integralgleichung darstellbar:

$$\varphi(s) = {}^{(L)}\int K(s,t) \cdot f(t) \cdot dt.$$

Die Funktion f , die das Objekt beschreibt, setzt sich aus Form- und Helligkeitsverteilung zusammen. Sie ist aus φ und K lediglich in geschlossener Form zu finden. Sollen Form- und Helligkeitsverteilung des Objekts getrennt werden, müssen über eins von beiden Voraussetzungen gemacht werden oder mehrere Messungen in verschiedenen Azimuten ausgeführt werden.

2. Die Theorie des Sterninterferometers von Pokrowski wird in allgemeiner beugungstheoretischer Form entwickelt.

Es zeigt sich, daß das Interferometer in der Tat eine ausgezeichnete Achse besitzt, die den Kreis der Anwendungen beschränkt. Die Objekte müssen relativ zum Interferometer ruhen.

3. Wird im Michelsoninterferometer auf die Einstellung des Verschwindens der Interferenzstreifen verzichtet, werden vielmehr die bei festen Doppelspalten zum jeweiligen Objekt gehörigen Interferenzbilder photometrisch ausgewertet, so besteht keine theoretische Grenze der Auflösung mehr.

4. Eine Versuchsreihe an Spalten in großer Entfernung als Objekt zeigt die Anwendbarkeit des Verfahrens. Es gelingt, die Michelsonsche Grenze um das Fünffache zu unterschreiten.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Hrn. Prof. F. Jentzsch am Physikalischen Institut der Universität Berlin begonnen und fast vollendet. Dem Hrn. Direktor des Instituts, Hrn. Geheimrat Nernst, und Hrn. Prof. Jentzsch möchte ich meinen verbindlichsten Dank für die Bereitstellung der Mittel und sonstige Unterstützung meiner Arbeit aussprechen. Außerdem schulde ich Hrn. Prof. F. Freundlich und der Firma Carl Zeiss Dank für die Erlaubnis, daß ich die Registrierphotometer der Einsteinstiftung und der Firma Zeiss benutzen durfte. Die Arbeit wurde in Jena am Institut für angewandte Optik unter Leitung des Direktors des Instituts, Hrn. Prof. F. Jentzsch, zum Abschluß gebracht.

VI. Literaturverzeichnis

- 1) L. Mandelstam, Festschrift für H. Weber, Leipzig 1912.
- 2) H. Fizeau, *Compt. rend.* **66**. S. 932. 1868.
- 3) Stéphan, *Compt. rend.* **76**. S. 1008. 1873.
- 4) Stéphan, *Compt. rend.* **78**. S. 1008. 1874.
- 5) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* [5] **28**. S. 77. 1889.
- 6) James Walker, *Phil. Mag.* [5] **46**. S. 472. 1898.
- 7) A. A. Michelson, *Phil. Mag.* [5] **30**. S. 1. 1890; *Amer. Journ. of Science* III. **39**. S. 115. 1890; *Nature* **45**. S. 160. 1891; *Bull. Astr. Soc. Pacific* **3**. S. 274. 1891; *Phil. Mag.* [5] **31**. S. 338. 1891; *Astrophysical Journ.* **51**. S. 257. 1920; *Mt. Wilson Contr.* No. 184.
- 8) I. A. Anderson, *A. J.* **51**. S. 263. 1920; *Mt. Wilson Contr.* No. 185; A. A. Michelson and F. G. Pease, *A. J.* **53**. S. 249. 1921;

Mt. Wilson Contr. No. 203; F. G. Pease, *Popular Astr.* **29**. S. 225. 1921; G. E. Hale, *Monthly Notices* **81**. S. 166. 1921; E. v. d. Pahlen, *Naturw.* **9**. S. 599. 1921; P. W. Merrill, *A. J.* **56**. S. 40. 1922; Mt. Wilson Contr. No. 240; J. A. Anderson, *A. J.* **55**. S. 48. 1922; A. S. Eddington, *Nature* **III**. No. 2791. 1923; R. Gans, *Phys. Ztschr.* **25**. S. 335. 1924; K. F. Bottlinger, *Ztschr. f. Instr.* **44**. S. 540. 1924; Sir Oliver Lodge, *Nature* **117**. S. 1. 1926; M. Ghenry de Bray, *ebd.* **117**. S. 235. 1926.

9) Maurice Hamy, *Bull. Astr.* **10**. S. 489. 1893; *Compt. rend.* **127**. S. 851 u. 982. 1898; **128**. S. 583. 1899; *Bull. Astr.* **16**. S. 257. 1899; *Compt. rend.* **169**. S. 821. 1919; **170**. S. 1143. 1920; **173**. S. 888. 1921; **175**. S. 1123. 1922; **176**. S. 1849. 1923.

10) H. Spencer Jones, *M. N.* **82**. S. 513. 1922; *Nature* **107**. S. 685. 1921.

11) S. Pokrowski, *Journ. Russ. Phys.-Chem. Ges.* **42**. Phys. Teil S. 280. 1910; *Astron. Nachr.* **192**. S. 22. 1912; *A. J.* **36**. S. 156. 1912; *A. N.* **199**. No. 4775. 1914; *A. J.* **41**. S. 147. 1915.

12) A. S. Eddington, *M. N.* **87**. S. 34. 1927.

13) A. A. Michelson, *Amer. Journ. of Science* [3] **39**. S. 115. 1890; E. Gehrcke, *Die Wissenschaft. Heft* **17**. S. 120. 1906.

14) R. Gans, *Verh. d. Phys. Ges. Göttingen* **8**. S. 2. 1925; *Ann. d. Phys.* **78**. S. 1. 1925.

15) U. Gerhardt, *Ztschr. f. Phys.* **35**. S. 697. 1926; *Naturwissenschaften* **13**. S. 533. 1925; *Verh. d. Phys. Ges.* [3] **6**. S. 39. 1925; *Ztschr. f. Phys.* **44**. S. 397. 1927.

16) O. v. Baeyer u. U. Gerhardt, *Ztschr. f. Phys.* **35**. S. 718. 1926.

17) H. Siedentopf, *Verh. d. Phys. Ges. Innsbruck* 21. bis 27. Sept. 1924; *Zsigmondyfestschrift; Erg.-Bd. d. Kolloidztschr.* **36**. 1925.

18) F. Goos, *Phys. Ztschr.* **27**. S. 202. 1926.

19) R. Bechmann, *Ann. d. Phys.* [4] **84**. S. 61. 1927.

20) E. Schrödinger, *Ann. d. Phys.* [4] **61**. S. 69. 1920.

21) V. Ronchi, *Lincei Rend.* [6] **2**. S. 319. 1925; **2**. S. 257. 1925; **1**. S. 659. 1925; *Ztschr. f. Phys.* **37**. S. 732. 1926.

22) M. A. Danjon, *Compt. rend.* **174**. S. 1408. 1922.

(Eingegangen 27. November 1929)

Elektrische Leitfähigkeit kathodenzerstäubter metallischer Schichten

Von E. Perucca

(Mit 8 Figuren)

1. Einleitung

Alle Physiker¹⁾, die Messungen von elektrischer Leitung in kathodenzerstäubten Schichten vorgenommen haben, führten die Versuche in Schichten mit bedeutender Leitfähigkeit aus.

Sehr selten sind Widerstände von $10^7 \div 10^8 \Omega$ gemessen worden; ein einziger Verfasser, R. W. King²⁾, verzeichnet Widerstände von $10^{10} \div 10^{11} \Omega$, die in wenigen Sekunden des kathodischen Niederschlages bis zu 10^8 und auch bis zu nur $10^5 \Omega$ herabgingen.

Nach diesem Verfasser scheinen „gold films, when they first begin to conduct, to undergo a rapid growth of conductivity without the addition of any metal“.

Andererseits beschränkt sich Mac Keown³⁾ auf Leitfähigkeitsmessungen an Schichten von mehr als $10 \text{ m}\mu$ Dicke, die also sehr gute Leiter sind, mit der Motivierung, daß bei geringerer Dicke der Widerstand so unbeständig ist, daß man alles Vertrauen zu den beobachteten Ergebnissen verliert.

Bereits mehrere Jahre früher bemerkte L. Houllévigüe⁴⁾ daß Schichten, die gerade so dick sind, daß man sie schon optisch wahrnehmen kann, keine merkliche Leitfähigkeit auf-

1) Die neueren Arbeiten sind die folgenden: A. Féry, Journ. de Phys. **9**. S. 39. 1928; R. S. Bartlett, Phil. Mag. **5**. S. 848. 1928; F. Joliot, Compt. rend. **186**. S. 1526. 1928; A. Féry, Compt. rend. **187**. S. 819. 1928.

2) R. W. King, Phys. Rev. **10**. S. 291. 1917.

3) S. S. Mac Keown, Phys. Rev. **23**. S. 85. 1924.

4) L. Houllévigüe, Compt. rend. **148**. S. 1320. 1909; **150**. S. 1237. 1910.

weisen. Diese trat plötzlich bei Zunahme der Dicke des Metalles auf.

Diese Tatsachen sind von allen als grundlegende Stütze der granulären Theorie solcher Niederschläge angesehen worden. Die von Houllévigüe vorgeschlagene, und von Swann und King wieder aufgenommene Theorie wird heute allgemein anerkannt.

In dieser Arbeit berichte ich über die experimentellen Ergebnisse, die ich beim Studium der Leitung in der Anfangsphase (Widerstand der Schichten bis auf $10^{14} \Omega$) erhalten habe.

Meine Resultate zeigen:

1. die Möglichkeit, konstante metallische Widerstände von $10^{10} \div 10^{12} \Omega$ zu erzielen,
2. verschiedene neue Tatsachen, die imstande sind, die Natur der elektrischen Leitung in den dünnen metallischen Schichten aufzuklären.

2. Versuchsanordnung

Der angewandte Apparat wird in Fig. 1 schematisch wiedergegeben. Ein Glasgefäß enthält die Kathode *C* in Form einer Platte *M* des zu zerstäubenden Metalles.

Ein halbzylindrisches Schutzglas *V* bewirkt, daß der kathodische Niederschlag nur gegen die Auflagefläche *L* der zu bildenden Schichten wirksam wird.

Die Anode besteht aus einem geerdeten Metallzylinder *A*, mit einem Fenster *NN* gegenüber der Kathode. Die Breite dieses Fensters läßt sich verändern und wird bei jedem Versuch so reguliert, daß die Auflageplatte *L* fast gänzlich die Breite des Fensters *NN* einnimmt, ohne jedoch die Ränder zu berühren.

T, U sind die beiden Klammern, die die Platte *L* festhalten. *T* ist an den Zylinder *A* gelötet, *U* an das Ende der metallischen Stange *F*, die zum Elektrometer geht.

Bei den höheren Leitfähigkeiten war ein Galvanometer in *G* eingeschaltet; *F* stand dann in Verbindung mit einem Potentiometer. *I, I* sind zwei Bernsteinstöpsel.

Endlich war die Anode *A* von einem Metallzylinder *D* umgeben, der sich durch einen von außen auf die Eisenstange *S* wirkenden Elektromagneten drehen konnte. Der

Zylinder *D* war mit geeigneten Fenstern versehen, so daß man, durch passende Umdrehung, die Auflageplatte *L* gegen die kathodische Projektion schützen, oder nur die Enden von

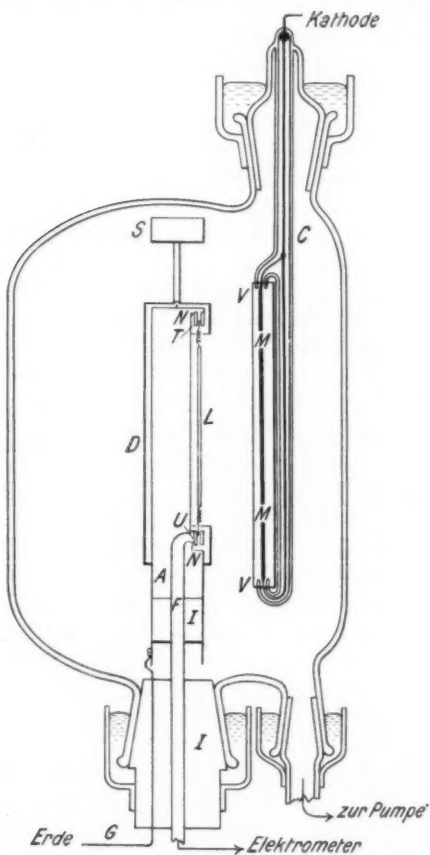


Fig. 1

L zerstäuben, oder endlich die ganze Platte *L* der metallischen Projektion aussetzen konnte.

Es wurden Zerstäubungen von Gold oder Platin auf Glas oder Quarz erhalten. *L* war bei jedem Versuch 6 cm lang;

die Breite von L betrug den einzelnen Versuchen nach 2 bis 12 mm. Die bestäubte Fläche war rechteckig, der Querschnitt der Platte trapezförmig, wobei die kleinere Basis gegen das Innere des Zylinders A gerichtet war, so daß die der Metallisierung unterworfenen Fläche aufs beste abgegrenzt wurde.

Die Enden der Platte L wurden stark metallisiert, um so einen guten Kontakt mit den zu den Klammern T, U führenden geklebten Federn zu bilden. Die zum Versuche verfügbare Fläche von L beschränkte sich also auf nur 5 cm Länge. Bei vielen Versuchen wurde die Auflageplatte L durch einen einfachen Quarz- oder Glasfaden von 0,5 mm Durchmesser ersetzt; der Übelstand der unbestimmten Breite der bestäubten Fläche hat keine Bedeutung für meine Schlußfolgerungen.

Als Kathode diente eine Platin- oder Goldplatte von 2×10 cm; die Entfernung zwischen M und L war 3 cm.

Die Entladung erfolgte in trockener Luft, unter einer konstanten Spannung von 900 bis 1400 Volt je nach den Versuchen. Als Generator diente eine Hochspannungsdynamo; die Stromstärke wurde immer sehr gering gehalten: von 2 bis höchstens 5 mA.

Die Metallablagerungen erfolgten also mit beträchtlicher Langsamkeit, bis zu mehr als 20 Minuten.

Ein Versuch zur Feststellung der Leitfähigkeit c als Funktion der Dauer t der kathodischen Projektion bestand in einer vorhergehenden Metallisierung der Enden der Platte L durch kathodischen Niederschlag von angemessener Dauer (bis zu etwa 1 Stunde).

Es folgten intermittierende Niederschlagsdosen von z. B. 10", dann jeweils eine Pause von 120". Die ersten von diesen Dosen dienten nur noch zum Metallisieren der Plattenenden, dann wurde, nachdem die ganze Platte L durch Umdrehung des Schutzes D freigelegt war, die Bildung der zu studierenden Schicht begonnen. In der Pause zwischen zwei Dosen erfolgte *in situ* die Messung der Leitfähigkeit.

Bei geringeren Werten wurde diese von der Entladungszeit eines auf 5 Volt geladenen veränderlichen Kondensators von angemessener Kapazität abgezogen. Der unbekannte Widerstand R stellt einen Verlust (Leakage) für den Kondensator dar, aber die Potentialdifferenz zwischen dessen Ar-

matoren wurde konstant gehalten, da der Verlust durch eine entsprechende Verringerung der Kapazität, ausgeglichen wurde.

Wenn $t_2 - t_1$ das Zeitintervall ist, während dessen man die Kapazität von C_1 auf C_2 herabsetzen mußte, so hat man einfach:

$$R = \frac{t_2 - t_1}{C_1 - C_2}$$

unabhängig vom konstanten Ladungspotential des Kondensators und von den Kapazitäten der Verbindungsdrähte und des Elektrometers.

Das verwendete Elektrometer war das Peruccasche Fadenelektrometer, das besonders bequem ist, da es schnell, empfindlich und aperiodisch ist.

Bei höheren Leitfähigkeiten wurde die gewöhnliche Siemensche Methode angewendet, wobei die Kapazität konstant bleibt, und das Ladungspotential des Kondensators schwankt infolge der durch R hervorgerufenen Ableitung.

Größere Leitfähigkeiten wurden mit dem Galvanometer gemessen. Die gemessenen Leitfähigkeiten schwankten zwischen 10^{-14} und $10^{-2} \Omega^{-1}$. Das Vakuum wurde durch eine Gaede-Quecksilberrotationspumpe erzeugt; der fettfreie Apparat hat kathodische Projektionen von beträchtlicher Dauer (bis zu mehr als einer Stunde) bei konstanter Spannung und Stromstärke gestattet, ohne daß eine beträchtliche Handhabung der Pumpe erforderlich wurde.

Jeder Voraussicht entgegen haben die Quecksilberdämpfe die kathodische Projektion nicht einmal bei Gold gestört; gleichwohl hielt man die aus der Pumpe strömenden Dämpfe durch einen Stopfen von Blattgold auf.

3. Ergebnisse

a) Bestimmung der Leitfähigkeit c als Funktion der Zerstäubungsdauer t . Bei den Platinhäutchen mit starkem Widerstand ($10^{13} \div 10^{11} \Omega$) hat man zwar zuweilen, gleich nach Unterbrechung der Entladung, eine schnelle Veränderung der Leitfähigkeit bemerkt, die in wenigen Sekunden bis zu 30 Proz. herabsinkt. Bei den Goldhäutchen tritt diese Veränderung entweder nicht ein, oder ist so plötzlich, daß sie der Beobachtung entgeht. Doch, nach dieser sehr raschen

Veränderung, zeigen die Platin- und Goldschichten eine wirkliche Stabilität; sie erleiden dann nur noch die langsamen Schwankungen der Leitfähigkeit, die oft bemerkt wurden und ganz sicher der Einwirkung des umgebenden Gases zuzuschreiben sind.

Infolge dieser Stabilität ist es möglich gewesen, die Funktion $c = f(t)$ zu bestimmen. Die Kurven $c = f(t)$ haben in

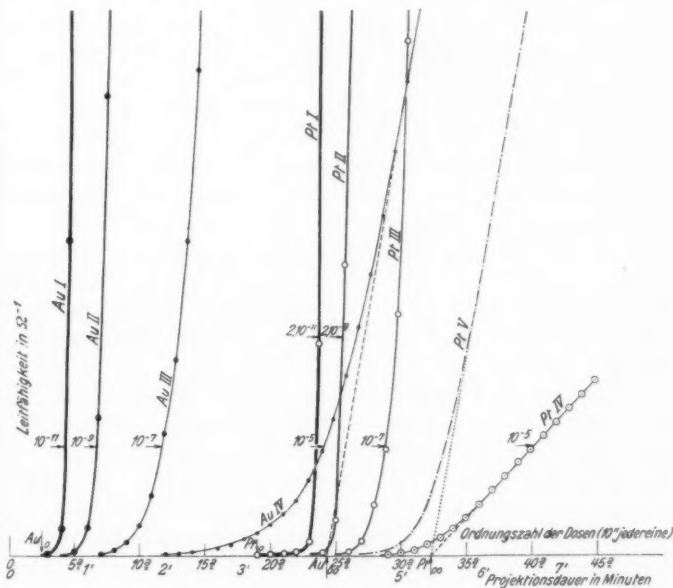


Fig. 2

jedem Falle die in Fig. 2 angegebene Form. Diese Kurven sind regelmäßig und beginnen an einem genau festgesetzten Punkte der Abszissenachse; nur bei bedeutenden Leitfähigkeiten sind diese Kurven gerade (Riede, Mac Keown).

Die in Fig. 2 wiedergegebenen Resultate beziehen sich auf eine Goldschicht auf Glasunterlage von 2,70 mm Breite, und auf eine Platinschicht auf einer gleichen Platte. Das Vakuum wurde so reguliert, daß während beider Versuche die

Entladung mit 900 Volt und 2,5 mA erfolgte. Die Dosen betrugen 10"; die Intervalle 120". Bei diesem Versuch ist die Leitfähigkeit von 10^{-14} auf $10^{-4} \Omega^{-1}$ gestiegen; man hat daher vier verschiedene Skalen auf der Ordinatenachse angewendet; die Kurven Au_I , Au_{II} , Au_{III} , Au_{IV} , stellen also vier auf verschiedener Skala einander folgende Bogen einer einzigen Kurve $c = f(t)$ dar.

Dasselbe gilt für Platin.

Au_0 bezeichnet den Zeitpunkt des Beginns der Leitfähigkeit, Au_{00} den des Beginns derjenigen Leitfähigkeit, die durch Extrapolation der geradlinigen Strecke der Kurve $c = f(t)$ (Riede, Mac Keown) abgeleitet werden kann.

Das Gleiche gilt für Pt_0 und Pt_{00} .

Die Kurve Pt_v , endlich, wird aus Pt_{IV} erhalten, indem man deren Ordinaten mit 5 multipliziert, d. h. mit dem Verhältnis der normalen Leitfähigkeiten des Goldes und des Platins.

In Fig. 3 sehen wir zwei Kurven $c = f(t)$, die Gold auf Quarz entsprechen, unter sehr langsamer Zerstäubung. Die für die Leitung wirkungslose Zerstäubungsdauer beträgt mehrere Minuten, während sie sich in Fig. 2 für Gold auf etwa 25" beschränkt.

Die beiden Kurven in Fig. 3 können einen Begriff von der Reproduzierbarkeit der Resultate geben. Außerdem beweist der Übergang von Dosen von 10" zu Dosen von 20" in der Mitte des Versuchs, entsprechend der Kurve II, daß dieser Übergang keinen Einfluß auf den Verlauf der Kurve hat.

Auf der Strecke der wirkungslosen kathodischen Bestäubung ($c \ll 10^{-13} \Omega^{-1}$) sind die Kurven I und II nach einer größeren Ordinatenkala gezeichnet, damit man die unregelmäßigen, aber schon mit dem Elektrometer gut meßbaren Schwankungen von c bemerken kann.

Nur einige Zerstäubungen auf Quarzfäden von 1μ und auch von $0,7 \mu$ Durchmesser haben unregelmäßige Resultate ergeben, so daß man in diesem Falle an der Existenz der Funktion $c = f(t)$ zweifeln kann.

Diese Unregelmäßigkeit ist viel größer bei Gold- als bei Platinüberzügen, und ich glaube dieselbe einem einfachen thermischen Effekt zuschreiben zu können; die Entladung ruft eine Erhitzung (manchmal bis zum Schmelzen des Quarzfadens)

hervor, und daher erfolgt während des Abkühlens ein Aufspringen der metallischen Schicht.

b) Aus den Kurven Fig. 2 leitet man ab, daß bei Versuchen mit Glasunterlage und unter praktisch gleichen Be-

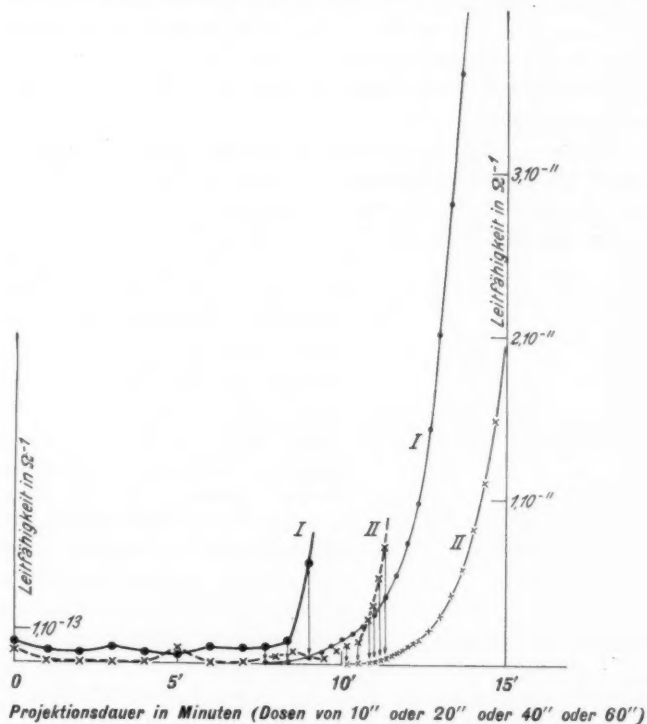


Fig. 3

dingungen, die für die Leitfähigkeit wirkungslose Anfangsperiode der kathodischen Bestäubung für Platin viel länger gewesen ist als für Gold, obwohl die Mengen von zerstäubten Metallen pro Zeiteinheit dieselben für beide Metalle sind. Dies folgt in der Tat aus dem fast gleichen Aufstieg der geradlinigen Endstrecken der beiden Kurven Au_{IV} und Pt_v , und stimmt überein mit den Ergebnissen von verschiedenen Verfassern

über die Abhängigkeit der Zerstäubung von der chemischen Natur der Kathode.

Eine für die Leitfähigkeit wirkungslose Zerstäubungsperiode, die für Platin länger ist als für Gold, wurde auch bei Niederschlägen auf Quarz gefunden. Der Versuch auf Glas ist interessanter, denn die Platin- und Goldschichten haben eine ganz verschiedene Adhäsion gegenüber dem Glase; Platin liegt fester an, und die Platte *L* kann nur mit Königswasser gereinigt werden.

c) Die geradlinige Strecke der Kurve $c = f(t)$ ist experimentell bis zu Leitfähigkeiten von etwa $10^{-2} \Omega^{-1}$, sowohl für Gold als auch für Platin, verfolgt worden. Der Aufstieg dieser Strecke ist innerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtungen

konstant gewesen, und ich habe keine Spur von einer weiteren plötzlichen Zunahme des Aufstiegs beobachtet, wie die von Riede und Mac Keown bei Nickel gefundene.

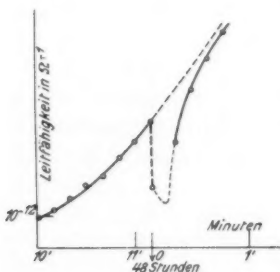


Fig. 4

d) Fig. 4 zeigt eine unter folgenden Bedingungen erhaltene Kurve: nachdem ich die Zerstäubung bis zu einer merklichen Leitfähigkeit der Schicht fortgesetzt hatte, unterbrach ich die Entladung, ließ in den Apparat

trockene Luft einströmen und die Schicht altern (zwei Tage lang, bei dem Versuch von Fig. 4); darauf stellte ich das Vakuum wieder her und nahm die kathodische Zerstäubung wieder auf.

Gleiche Versuche, bei denen ich Gold auf einer gealterten Platinschicht zerstäubte, haben ziemlich unregelmäßige Resultate ergeben; auf jeden Fall aber fehlt die für die Leitung wirkungslose Anfangsphase der Zerstäubung.

e) Die Leitung der metallischen Schichten folgt dem Ohmschen Gesetz $i = k \cdot V$, wo k konstant ist, auch wenn die Leitfähigkeit nur $10^{-12} \Omega^{-1}$ ist.

Für geringere Leitfähigkeiten habe ich keinen Versuch gemacht, doch ist es nicht ausgeschlossen, daß das Ohmsche

Gesetz noch gültig ist. Die höchste bei diesen Versuchen angewendete Spannung betrug 72 Volt.

Außerdem besteht keine Spur ($\pm 0,003$ Volt) von einer elektromotorischen Gegenkraft; auch nicht in Schichten mit einer Leitfähigkeit von nur $10^{-12} \Omega^{-1}$. Für geringere Leitfähigkeiten habe ich keine Versuche gemacht.

Die Leitung hat also einen rein metallischen Charakter.

f) Fig. 5 zeigt das Potentialgefälle längs einer Goldschicht auf einem Quarzfaden von 0,5 mm, Durchmesser, mit einer Leitfähigkeit von $6,45 \cdot 10^{-12} \Omega^{-1}$.

Die verwendete totale Spannung war 40 Volt.

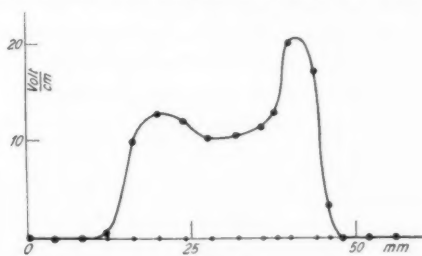


Fig. 5

Das Potentialgefälle ist praktisch gleich Null an den Fadenenden, und zwar wegen der sehr starken vorhergehenden Vergoldung.

Die Veränderlichkeit des Potentialgefälles längs des Fadens kann sicher der Ungleichmäßigkeit der metallischen Dicke zugeschrieben werden.

Das gleiche Resultat erhielt ich mit Platinschichten.

Einige der erzeugten Schichten mit einem Widerstand von $10^{10} \div 10^{11} \Omega$ haben ein Potentialgefälle an einem oder zwei Punkten der Schicht aufgewiesen. Diese Schichten zeigten auch eine elektromotorische Gegenkraft (bis zu 0,1 Volt); es handelt sich offenbar um Ablagerungen von beträchtlicher Dicke mit einer oder zwei Unterbrechungen; in diesem Falle trägt zu der Leitung von elektrolytischem Charakter wahrscheinlich auch die Auflageplatte bei.

g) Übereinstimmend mit zahlreichen Ergebnissen früherer Verfasser ist der Temperaturkoeffizient des Widerstandes der

sehr dünnen metallischen Schichten anormal. Dieser Temperaturkoeffizient wurde von mir bei Zimmertemperatur auf Platin- und auf Goldschichten gemessen.

Platinschichten auf Quarz oder Glas, mit $R = 10^{10} \div 10^{11} \Omega$, hatten einen negativen sehr starken Temperaturkoeffizienten, bis zu mehr als 1 Proz. pro Grad!

Dagegen gaben Goldschichten auf Quarz, mit $R = 10^{10}$ bis zu $2 \cdot 10^{11} \Omega$, einen Temperaturkoeffizienten, der praktisch gleich Null ist ($< 0,5\text{‰}$ pro Grad).

4. Anwendung auf die Bronson-Methode

Diese Methode¹⁾ zur Messung sehr schwacher Ströme besteht darin, daß man den Strom i durch einen sehr starken Widerstand R leitet, und die an den Enden von R hervorgerufene Spannung ΔV mißt oder kompensiert. Es ist $i = \frac{\Delta V}{R}$. Ein Elektrometer dient zur Messung von ΔV oder zum Nachweis der Kompensation.

Eine solche Vorrichtung entspricht einem Galvanometer dessen innerer Widerstand sehr groß ist. Daher ist die Methode nur in gewissen Fällen anwendbar, aber dann äußerst wertvoll.

Voraussetzung ist indessen ein Ohmscher konstanter Widerstand von $10^{10} \div 10^{11} \Omega$, so wie ein schnelles und möglichst empfindliches Elektrometer.

a) Widerstand

Nachdem man die, wenn auch recht elegante Idee aufgegeben hatte²⁾, einen solchen Widerstand durch eine Ionisierungskammer zu realisieren, die eine geeignete radioaktive Substanz enthält, wurden vorgeschlagen: der Widerstand mit Kadmiumjodid in Amylalkohol (Hittorf), der Xylolalkohol-Widerstand (Campbell), der Magnaninische Widerstand [Behnken³⁾], der Jod-Benzin-Widerstand [Rollefson⁴⁾], und der Pikrinsäure-Benzol-Alkohol-Widerstand [Gyemant⁵⁾].

1) Phil. Mag. 11. S. 143. 1906.

2) R. Jaeger (Ztschr. f. Phys., 52. S. 627. 1928), hat aber diese Idee von Rutherford erst kürzlich wiedergenommen.

3) H. Behnken, Ztschr. f. Phys. 3. S. 48. 1920.

4) G. K. Rollefson, Science 60. S. 226. 1922.

5) A. Gyemant, Ztschr. f. techn. Phys. 8. S. 491. 1927.

Aber keiner dieser Widerstände vereinigt die Erfordernisse der Konstanz, der Unpolarisierbarkeit, und des kleinen Temperaturkoeffizienten. Die Tatsache, daß eine Firma wie Günther und Tegetmeyer aufgehört hat, hohe Widerstände zu bauen, wegen der damit erzielten schlechten Ergebnisse, ist symptomatisch.

Ist es möglich, Widerstände von $10^{10} \div 10^{11} \Omega$ mittels kathodischer Zerstäubung zu erhalten?

Die beschriebenen Versuche gestatten eine Bejahung. In der Tat:

1. Es ist leicht, die kathodische Projektion aufzuhalten, sobald die Leitfähigkeit der Schicht einen bestimmten Wert erreicht hat, der $10^{10} \div 10^{12} \Omega$ betragen kann.

2. Die Leitfähigkeit einer solchen Schicht schwankt zwar zunächst beträchtlich, sowohl wenn man diese in verdünnter Luft, worin die Zerstäubung erfolgte, aufbewahrt als auch in (trockener) Luft unter gewöhnlichem Druck. Aber auch in letzterer erreicht die Leitfähigkeit nach einer Alterungszeit von höchstens einigen Wochen einen definitiven konstanten Wert [innerhalb 0,5 Proz. wenigstens].¹⁾

3. Es ist keine Spur von elektromotorischer Polarisierung vorhanden, und das Ohm-Gesetz gilt vollkommen. Selbst bedeutende Spannungsüberlastungen verändern nicht die Leitfähigkeit der Schicht. Die hergestellten Widerstände, die dazu bestimmt sind, Spannungen von 1 Volt auszuhalten, haben selbst durch eine Dauerbelastung von 72 Volt keinen Schaden erlitten.

4. Bei Verwendung von Goldschichten auf Quarz hat man Widerstände ($10^{10} \div 2 \cdot 10^{11}$) erhalten, bei denen der Temperaturkoeffizient praktisch gleich Null ist. Die zahlreichen hergestellten und verschiedene Monate hindurch geprüften Widerstände beweisen, daß konstante metallische Widerstände von

1) Die Schichten haben manchmal eine plötzliche Unterbrechung der Leitfähigkeit hervorgebracht, die wahrscheinlich auf das Rissigwerden der Metallablagerung zurückzuführen ist. Doch dieser Übelstand hat sich nach einer angemessenen Verbesserung der Technik der Schichtbildung nicht mehr herausgestellt.

Die langsamen Veränderungen der Leitfähigkeit, die gewöhnlich während des Alterns der Schicht bemerkt wurden, erreichen fast nie 100 Proz. des Anfangswertes.

$10^{10} \div 10^{11} \Omega$) mit einem Temperaturkoeffizienten, der praktisch Null ist, verwirklicht sind.

b) Elektrometer

Bis vor einigen Jahren war das Quadrantenelektrometer fast allein üblich, und so wurde ein großer Teil der Vorzüge der Bronsonmethode durch die wohlbekannten Übelstände dieses Elektrometers verdeckt.

Vorrichtungen mit thermionischen Verstärkern, die geeignet sind das Elektrometer zu ersetzen, sind von mehreren Verfassern vorgeschlagen worden, aber man kann nicht sagen, daß das Ergebnis völlig der Erwartung entsprochen hätte.

So schließen R. Jaeger und A. Kussmann²⁾, daß die thermionischen Verstärker größere Bequemlichkeit bieten, da das Elektrometer wegfällt, doch wird dabei nichts an Empfindlichkeit gewonnen, und fast sicher an Genauigkeit verloren. Gleiche Schlüsse zieht die neueste Arbeit von E. Rasmussen³⁾: bei Anwendung eines thermionischen Verstärkers muß man sich damit begnügen, Ströme bis zu nur 10^{-12} Amp. zu messen; weiterhin überwiegen die charakteristischen Übelstände des thermionischen Verstärkers über den Vorzug der Verwendung eines einfachen Zeigergalvanometers zur Messung des verstärkten Stromes i .

Angesichts der beharrlichen Versuche der thermionischen Verstärkung sehr schwacher ionischer Ströme scheint es mir angebracht, festzustellen, daß die neuen Fadenelektrometer sicherlich eine Verbesserung der Bronsonmethode gestatten. Das Elektrometer von Lindeman und Keeley, und noch mehr das von Perucca, wegen seiner größeren Empfindlichkeit und leichteren Veränderlichkeit beseitigen die gewöhnlich bei dem Quadrantenelektrometer angetroffenen Anwendungsschwierigkeiten.

Man verliert auch nicht viel an Empfindlichkeit, da das Peruccasche Elektrometer 0,001 Volt bei einer Einstellungs-

1) Ein konstanter Widerstand von $8 \cdot 10^{11} \Omega$ hat mehrere Monate ausgezeichnet funktioniert, doch ist er schon zu stark für die Bronsonmethode.

2) R. Jaeger u. A. Kussmann, *Phys. Ztschr.* 28. S. 645. 1927.

3) E. Rasmussen, *Ann. d. Phys.* [5] 2. S. 357. 1929.

geschwindigkeit von etwa einer Sekunde geben kann, wenn das Beobachtungsmikroskop eine Vergrößerung von 500 hat.

Es ist nicht angebracht, den Wert $R = 10^{11} \Omega$ zu überschreiten, man hat also eine Vorrichtung, welche bis zu 10^{-14} Amp. mißt, und dabei die Eigenschaften eines Zeigerinstrumentes aufweist.

Die Messung von Ionisationsströmen, die Dosierung von X-Strahlen oder von radioaktiven Substanzen, die Messung von Kapazitäten auch nur weniger $\mu\mu\text{F}$, die Messung sehr hoher Widerstände, können von solcher Vorrichtung großen Nutzen ziehen.

Z. B. genügten mir einige 10 Sek., um die Kurve $i = f(V)$ des Stromes i in Funktion der Spannung V in einer Ionisationskammer, enthaltend eine kleine Menge von Mesothor, zu bestimmen. Der Sättigungsstrom war $3,41 \cdot 10^{-10}$ Amp., und gab dem Elektrometer, das auf eine Empfindlichkeit von nur 0,1 Volt eingestellt war, den Ausschlag 34,5 Skt. ($R = 1,01 \cdot 10^{10} \Omega$).

Mit dem auf eine Empfindlichkeit von 0,01 Volt regulierten Elektrometer und mit $R = 5 \cdot 10^{10} \Omega$ kann man sehr gut die Schweidler-Schwankungen in dem vom Uranoxyd (aktive Fläche 8 cm^2) gelieferten Ionisationsströmen verfolgen.

Diese Schwankungen gehen bis zu 4 Skt. der Elektrometer-Skala.

5. Theoretische Betrachtungen über die elektrische Leitung in sehr dünnen Schichten

Sowohl die Versuche von Houllévigüe als auch die ultramikroskopischen Beobachtungen von King, ferner auch die natürlichste Vorstellung von der Bildung metallischer zerstäubter Häute veranlaßten die Vorstellung, daß in der ersten Niederschlagsphase die Schicht eine körnige Struktur habe; erst bei weiterem Verlauf der Projektion kommen die vergrößerten und vermehrten Körner in Berührung, und erst dann zeigt die Schicht eine Leitfähigkeit.

Die jüngsten Arbeiten von Hippel und Blechschmidt, von Ingersoll und Sordahl stützen demgegenüber den Gedanken einer wahren atomistischen Projektion von der Kathode; die auf der Antikathode sich verdichtenden Atome sollen eine

kristallinische Struktur bilden. Kahler hat mit X-Strahlen den Wert von etwa 4 ÅE für den mittleren Durchmesser der Mikrokristalle aus Gold und Platin im Falle der kathodischen Zerstäubung erhalten. Dieser Wert wird von Messungen an ziemlich dicken Schichten abgeleitet, und ist daher als Maximalgrenze der in sehr dünnen Schichten vorhandenen kristallinen Individuen zu betrachten.

Die kleinsten Schichtdicken, die eine eben wahrnehmbare Leitfähigkeit aufweisen, sind von den einzelnen Verfassern auf einige 10 ÅE (10 ÅE für Platin, bis zu 60 ÅE für Gold) berechnet worden. Nach diesen Ergebnissen müßte man daher schließen, daß die Körner erst dann in elektrischen Kontakt treten, wenn ihre Durchmesser einigen 10 Atom-Radien gleich sind, und wenn jedes Korn schon eine bedeutende Anzahl von mikrokristallinen Überlagerungen enthält.

Zufolge meiner experimentellen Ergebnisse müssen diese nicht leitenden Schichten eine beträchtlich geringere Dicke haben, besonders bei Gold; doch habe ich keine direkten Bestimmungen der zerstäubten Metallmengen vorgenommen; und eine indirekte Bestimmung durch die bereits vorgeschlagenen Formeln über die Abhängigkeit der zerstäubten Masse als Funktion der Eigenheiten der Entladung ist nach meiner Ansicht nicht sicher. Deshalb kann ich diese geringeren Dicken nicht für gesichert halten. Gleichwohl mußte die Dicke meiner noch nicht leitenden Schichten ($c < 10^{-13} \Omega^{-1}$) schon annehmbar sein, wie es der folgende einfache Versuch beweist. Ein Quarzfaden von etwa 0,5 mm Durchmesser wird mit Gold bestäubt; diese Bestäubung kann mit ein wenig Übung, kurz bevor die Goldschicht das erste Zeichen von Leitung gibt, aufgehalten werden. Der so vergoldete Quarzfaden wird über einem Gasflämmchen geblüht. Die Goldschicht wird glühend und verdampft, und so wird der Faden von dem Metall befreit. Das Emissionsvermögen des Quarzes ist schwächer als das der Goldschicht; man kann daher leicht das Vorhandensein dieser Schicht feststellen und deren Verschwinden verfolgen, während man das Flämmchen nach und nach an dem Quarzfaden entlangführt. Auf diese Weise kann man ebenso das Vorhandensein einer noch nicht leitenden Platinschicht feststellen; der Beweis ist aber in diesem Falle weniger schön, da das Platin

nicht verdampft und deshalb der Kontrast zwischen metallisiertem und bloßem Faden nicht hervortritt.

Eine alte Elektronentheorie von J. J. Thomson versuchte die schwache Leitfähigkeit der dünnen Schichten mittels einer Verminderung der freien mittleren Weglänge der Elektronen zu erklären. Sie wurde aber bald verworfen, da sie die schnelle Veränderung der spezifischen Leitfähigkeit mit abnehmender Dicke der Schicht nicht abzuleiten gestattete.

So hat man bis heute die folgenden Theorien angenommen:

- a) die einfache Körnertheorie von Houllévigüe-King;
- b) die Körnertheorie von Swann, Mac Keown, Riede.

Diese letztere Theorie wird durch die Annahme ergänzt, daß der elektrische Kontakt zwischen den Körnern mit einer geringeren Leitfähigkeit beginnt als die, welche normal der Metallmasse für die Bewegung der Elektrizität von Atom zu Atom entspricht. *Nun wird weder die eine, noch die andere von diesen Körnertheorien durch experimentelle Resultate gestützt.* Tatsächlich waren die Leitfähigkeitsversuche mit Schichten auf sehr dünnen Quarzfäden sowie die in § 3b) genannten Untersuchungen gemacht worden, um Beweisgründe zugunsten einer solchen Körnertheorie zu sammeln. Aber die Versuche metallischer Projektion auf sehr dünne Fäden haben keine Resultate ergeben, die imstande sind, triftige Beweisgründe für oder gegen eine Körnertheorie aufzubringen.

Was die Versuche § 3b) anbelangt, so dachte ich, daß Platin, welches viel mehr am Glase haftet als das Gold, wegen der Adhäsionskraft mehr gegen das Glas breitgepreßte Körner geben müßte; die Leitungskurve hätte mit geringeren Dicken von Platin beginnen (in Übereinstimmung mit den Resultaten von Pogany und von Weber und Oosterhuis) und dann im Verhältnis weniger rasch steigen müssen als es bei Gold der Fall ist, und zwar wegen der geringeren Menge gekörnten Metalles, welche erst dann zur Leitung beitragen würde, wenn sie mit den benachbarten Körnern in Berührung getreten wäre.

Um diese Vermutung experimentell zu bestätigen, muß man die Funktion $\varphi = (s)$ kennen, die die Leitfähigkeit als Funktion der Dicke s der Schicht gibt, während die Versuche die Funktion $c = f(t)$ ergibt. Es ist nun von E. Blechschmidt¹⁾

1) E. Blechschmidt, Ann. d. Phys. 81. S. 1006. 1926.

festgestellt worden, daß die abgelagerte Metallmenge proportional zur Dauer der Entladung ist, wenn man eine Anfangsperiode der Entladung ausschließt, der keine metallische Zerstäubung entspricht. Diese wirkungslose Entladungsperiode ist aber bei Edelmetallen sehr klein. Zur Bestätigung dessen, wenigstens von dem Zeitpunkt an, wo die Leitung der Schicht empfindlich geworden ist, hat die Dosendauer, die von 10" auf 20" gestiegen und dann auf 10" zurückgekehrt ist, nicht die Regelmäßigkeit der Kurve $c = f(t)$ beeinflußt (vgl. Kurve II, Fig. 3).

Ich glaube demnach, daß man die Proportionalität zwischen der Dicke des niedergeschlagenen Metalles s und der Gesamtdauer t der Projektion annehmen darf. Die Kurven (Figg. 2, 3, 4) geben dann auch die Form der Funktion $c = f(s)$. Aus dem Vergleich der Kurven Au_{IV} , Pt_{V} in Fig. 2 zeigt sich, daß die dem Platin entsprechende Kurve schneller ansteigt, um ihre geradlinige Strecke zu erreichen, als dies die dem Golde entsprechende Kurve tut. Außerdem ist, wenn man nicht etwa dem Platin eine für die Zerstäubung wirkungslose Anfangsperiode der Entladung zuschreiben will, die viel länger ist als für Gold und zwar um mehrere Minuten, die nichtleitende Dicke bei Platin größer als die nichtleitende bei Gold.

Aber in der Form der experimentellen Kurve $c = \varphi(s)$ (Fig. 8), hat man meines Erachtens den gründlichen Beweis gegen die Körnertheorien.

1. Nach der Theorie von Houllevigue-King sollte die Leitung plötzlich einsetzen bei einer gewissen mittleren Dicke der Ablagerung; diese Dicke ist eine Funktion der Natur des Metalles, der Natur der Unterlage, der Ablagerungsgeschwindigkeit (Größe der Mikrokristalle und der Körner).

Bei einer $l_1 = 0,5$ mm breiten und $l_2 = 50$ mm langen Schicht wäre die mindest-mögliche Leitfähigkeit, auch unter den günstigsten Bedingungen, schon $10^{-9} \Omega^{-1}$.

Mit zunehmender mittlerer Dicke der Ablagerung (und daher mit zunehmender Dauer der kathodischen Projektion) könnte die Leitung die sich bereits gebildete körnige Ablagerung benutzen, da sich diese Körner nach und nach aneinander heften. Man sollte daher eine schnelle Zunahme

der Leitfähigkeit c beobachten; dc/ds sollten höher sein als der normale konstante Wert k , der der Metallmasse entspricht.

Kurz gesagt: die Kurve $c = \varphi(s)$ müßte die in Fig. 6 angegebene Form haben und zwar konkav gegen die Abszissenachse, asymptotisch mit der Geraden $c = k \cdot s$ (Ohm).

Wenn eine erste Körnerschicht gewissermaßen eine Kolonnade bildet, auf die sich der Rest der Schicht stützt, könnte die Kurve $c = \varphi(s)$ zu einer Geraden $c = k \cdot s - h$ asymptotisch verlaufen.

Im Gegenteil wurden Leitfähigkeiten von weit unter $10^{-9} \Omega^{-1}$ realisiert, und die experimentelle Kurve $c = \varphi(s)$ (Fig. 8) hat eine ganz andere Form.



Fig. 6



Fig. 7



Fig. 8

2. Nach den meisten Physikern (Swann, MacKeown, Riede und anderen) erhält man die Leitung zwischen den einzelnen Körnern, auch wenn der Kontakt nicht elektrisch vollkommen ist, was von der unvollkommenen Haftung der Körner oder von der Einwirkung von Gasatmosphären abhängen kann. Die neueren Standpunkte der Wellenmechanik können leicht eine beginnende Leitfähigkeit erklären, selbst wenn die Atome nicht in Kontakt stehen (nach dem gewöhnlichen Sinne dieses Ausdrucks). Es ist klar, daß man so das Vorhandensein einer fortwährend von Null an zunehmender Leitfähigkeit rechtfertigen kann. Die Annahme einer unvollkommenen Leitfähigkeit zwischen den einzelnen Körnern muß die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes (Proportionalität des Stromes mit der angewandten Spannung) und den Mangel an elektromotorischer

Polarisationskraft berücksichtigen. Gleichwohl führt eine solche Annahme, wenn man nicht gar den Grundbegriff der Körnertheorie ableugnen will, zu dem Schlusse, daß man mit Zunahme der Plattendicke, also durch Vervollkommenung der Kontakte und somit bei Bildung einer Metallmasse, Werte von dc/ds , beobachten muß, die höher sind als der normale Wert k . Die Kurve $c = \varphi(s)$ müßte den Verlauf der Fig. 7 haben und in einem geeigneten Intervall von Werten s der Abszissenachse gegenüber konkav sein.

Auch diesmal könnte die Kurve nicht mit der Geraden $c = k \cdot s$, sondern könnte mit der Geraden $c = k \cdot s - h$ asymptotisch sein.

Die von mir unternommenen Versuche ergänzen auf dem Gebiete der schwachen Leitfähigkeiten die Ergebnisse von Mac Keown und Riede. Nach diesen Resultaten muß man ausschließen, daß die Kurve $c = \varphi(s)$ eine Konkavität gegen die Abszissenachse aufweisen kann (Fig. 8).

Dieser Widerspruch zwischen der Körnertheorie und den Versuchsergebnissen ist schon von Riede bei seinen Nickelschichten hervorgehoben worden. Da die Riedesche Kurve nicht bis zur Abszissenachse reicht (gemessene minimale Leitfähigkeit etwa $10^{-4} \Omega^{-1}$), hält dieser Verfasser die Körnertheorie noch für haltbar; vielleicht stellt er sich vor, daß die erwartete Konkavität in der nicht experimentell bestimmten Anfangsstrecke der Kurve $c = \varphi(s)$ verborgen sei.

Die Strecke OS_0 (Fig. 8) müßte nach Riede dem Vorhandensein einer ersten, nichtleitenden oxydierten Nickelschicht zugeschrieben werden.

Doch abgesehen von der von mir festgestellten Nichtexistenz der Konkavität auch auf der Anfangsstrecke der Kurve, ist OS_0 nicht gleich Null, weder für Gold noch für Platin; muß man also die Existenz einer Schicht von Goldoxyd oder Platinoxid annehmen?

Es ist wohl wahr, daß L. R. Ingersoll und J. D. Hanawalt¹⁾ kürzlich zu dem Schlusse gelangt sind, daß die während der kathodischen Zerstäubung anwesenden Gase chemisch aktiviert sind; es ist aber ebenfalls eine experimentell bestätigte Tatsache (§ 3d), daß auf einem metallischen an der Luft ge-

1) L. R. Ingersoll u. J. D. Hanawalt, Phys. Rev. **34**, S. 972. 1929.

alterten, also mit einer gewöhnlichen Gasschicht bedeckten Häutchen die kathodische Projektion nicht mehr jene erste Zerstäubungsphase zur Folge hat, der eine Nichtleitung entspricht. Warum bildet sich unter diesen Umständen nicht mehr eine Oxydschicht?

Man kann darauf mit einer Verneinung der Äquivalenz der chemischen Wirkungen der Gasatmosphären des Quarzes oder des Glases einerseits und des Goldes oder Platins andererseits antworten, und kann man eine Wiederholung der Experimente in einem chemisch inaktiven Gase voraussagen.

Doch ich glaube, daß sich bei diesem Punkte eine Annahme als natürlich erweist, die sich in direktester Weise an die experimentellen Tatsachen hält. Es ist dies die folgende Annahme: *Metallschichten mit einer Dicke von wenigen atomischen Durchmessern sind nichtleitend, d. h. enthalten keine freien Elektronen*: Ein Metall besitzt gewöhnlich eine oberflächliche metallische, aber nichtleitende Schicht.

Die metallischen Schichten sind isolierend, solange ihre Dicke nicht doppelt so groß ist wie die der isolierenden Oberflächenschicht.

Da die experimentelle Kurve in Fig. 8 durch 1 und nicht durch 2 dargestellt wird, so ist die Konzentration von Leitungselektronen gleich Null in der isolierenden oberflächlichen Schicht, wächst fortwährend von Null bis zum normalen Wert, ungefähr in einer Dicke, die der nichtleitenden bei Platin gleichkommt, und die vielleicht dem Zehnfachen der nichtleitenden Dicke bei Gold entspricht.

Die Annahme ist gewiß eine kühne und zwingt uns, eine ganze Reihe von grundlegenden Erscheinungen von einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten.

So z. B. die autoelektronische Entladung, die thermionische und photoelektrische Emission, die Austrittsarbeit der Elektronen, die elektrische Leitung durch Kontaktflächen zweier Körper, die isolierenden Eigenschaften der metallischen Dämpfe würden nach einem von den gebräuchlichen abweichenden Gesichtspunkte ihre Erklärung finden. Solche Folgerungen gehen jedoch über die Grenzen dieser Arbeit hinaus.

Zusammenfassung

Es werden auf experimentellem Wege die elektrischen Eigenschaften von Gold- und Platinschichten festgestellt, die durch kathodische Zerstäubung erhalten wurden. Besonders wird die Anfangsphase der Leitung als Funktion der Dauer der kathodischen Projektion studiert.

Auch bei geringeren Leitfähigkeiten ($10^{-12} \Omega^{-1} \text{ cm}$) haben die Versuchsschichten eine bedeutende Stabilität ihrer elektrischen Eigenschaften gezeigt.

Die Leitfähigkeit hat einen rein metallischen Charakter, und der Spannungsgradient ist in regelmäßiger Weise längs der Schicht verteilt.

So hat man unpolarisierbare konstante Widerstände von $10^{10} \div 10^{12} \Omega$, mit einem Temperaturkoeffizienten, der praktisch gleich Null ist, erzielen können. Die Verwendung dieser Widerstände zusammen mit einem empfindlichen Fadenelektrometer gestattet, bedeutende Vorteile bei Anwendung der Bronsonmethode zu erreichen.

Die unternommenen Versuche stützen nicht die Körnertheorie, die bis heute allgemein angenommen wurde.

Auch bei Gold und Platin ist eine gewisse Dicke des zerstäubten Metalles kein Leiter, was von Riede beim Nickel schon erhaltenen Ergebnissen entspricht.

Der Verfasser kommt zu dem Schlusse, daß es äußerst unwahrscheinlich ist, daß dies der Gegenwart einer nichtleitenden Oxydschicht zuzuschreiben sei; er stellt daher die Vermutung auf, daß die in ein Dielektrikum getauchten Metalle gewöhnlich eine oberflächliche metallische Schicht besitzen, in der die Konzentration an Leitungselektronen gleich Null ist.

Torino, Laboratorio di Fisica Sperimentale R. Scuola di Ingegneria, November 1929.

(Eingegangen 12. Dezember 1929)

Über die Richtung der Energieströmung in einer Zylinderwelle

Von Johannes Picht

(Mitteilung aus dem Institut der Einstein-Stiftung, Potsdam)

(Mit 9 Figuren)

In der Arbeit: „Beitrag zur Theorie der Totalreflexion“¹⁾ ist in § 11 nebenher die mathematische Darstellung der Energieströmung in einer (Kreis-) Zylinderwelle gegeben, und zwar für den speziellen Fall — mit dem wir uns auch hier allein



Zur Koordinatenwahl

Fig. 1

beschäftigen wollen —, daß der magnetische Vektor der Brennlinie des Strahlenbündels parallel ist. Wählen wir das Koordinatensystem so, daß die y -Achse mit der Brennlinie des Bündels zusammenfällt, und daß die x -Achse durch die Fortpflanzungsrichtung des Hauptstrahles der (zweidimensional betrachteten) Zylinderwelle gegeben ist (Fig. 1), so lautet nach A, § 1 (1) der Hertzsche Vektor \mathfrak{H} im Aufpunkte (x, z) , wenn wir noch die auftretenden Längen (x und z) in Wellenlängen gemessen denken:

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = 0 & ; & \mathfrak{H}_y = 0 \\ \mathfrak{H}_z = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i[\nu t - 2\pi(x \cos \alpha + z \sin \alpha)]} d\alpha \end{cases}$$

1) Ann. d. Phys. [5] 3. S. 433. 1929 nachfolgend durch A bezeichnet.

Die Feldvektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{H} haben dann nach A, § 1, 12 die Form

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{E}_x = -\frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\hat{a}}^{+\hat{a}} \sin \alpha \cos \alpha e^{i[\dots]} d\alpha & \mathfrak{H}_x = 0 \\ \mathfrak{E}_y = 0 & \mathfrak{H}_y = -\int_{-\hat{a}}^{+\hat{a}} \cos \alpha e^{i[\dots]} d\alpha \\ \mathfrak{E}_z = +\frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\hat{a}}^{+\hat{a}} \cos^2 \alpha e^{i[\dots]} d\alpha & \mathfrak{H}_z = 0 \end{array} \right.$$

$$e^{i[\dots]} = e^{i[\nu t - 2(x \cos \alpha + z \sin \alpha)]}.$$

Für den zeitlichen Mittelwert der Energieströmung ergibt sich nach A, § 11 (12 b)

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{c}{8\pi\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{2x} [(\Delta C)^2 + (\Delta S)^2] \quad ; \quad \overline{\mathfrak{E}_y^2} = 0 \\ \overline{\mathfrak{E}_z^2} = \frac{c}{8\pi\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{\pi\sqrt{2x}} (\Delta C \cdot \Delta s - \Delta S \cdot \Delta c) \right. \\ \quad \left. + \frac{z}{x} \{(\Delta C)^2 + (\Delta S)^2\} \right] \end{array} \right.$$

wo $\Delta C = C(\xi_2) - C(\xi_1)$ und $\Delta S = S(\xi_2) - S(\xi_1)$

die Differenzen der für

$$(4) \quad \xi_2 = +\frac{2(x\hat{r}-z)}{\sqrt{2x}} \quad \text{und} \quad \xi_1 = -\frac{2(x\hat{r}+z)}{\sqrt{2x}}$$

genommenen Fresnelschen Integrale sind und entsprechend

$$\Delta c = \cos \frac{\pi}{2} \xi_2^2 - \cos \frac{\pi}{2} \xi_1^2 \quad \text{und} \quad \Delta s = \sin \frac{\pi}{2} \xi_2^2 - \sin \frac{\pi}{2} \xi_1^2.$$

Hier ist noch $\hat{r} = \sin \hat{a}$, wo \hat{a} den Winkel der Randstrahlen mit der x -Achse bezeichnet. Demnach ist

$$(4^*) \quad \xi_2 = \frac{2(x \sin \hat{a} - z)}{\sqrt{2x}} \quad \text{und} \quad \xi_1 = -\frac{2(x \sin \hat{a} + z)}{\sqrt{2x}}.$$

Die Gleichungen für $\overline{\mathfrak{E}_x^2}$ und $\overline{\mathfrak{E}_z^2}$ gelten ihrer Ableitung gemäß nicht für die Ebene $x=0$. Sie nehmen hier den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ an. Aus A, § 11, (5 b) erhalten wir nach Einführung der durch die zweckmäßige Wahl des Ko-

ordinatensystems bedingten Vereinfachungen für $x = 0$ nach Auswerten der Integrale

$$(5) \quad (\overline{\mathfrak{E}}_x)_x=0 = \frac{c}{8\pi\sqrt{s}} \left(\frac{\sin 2\pi\hat{r}z}{2\pi\hat{r}z} \right)^2 \cdot 4\hat{r}^2 ; \quad (\overline{\mathfrak{E}}_z)_x=0 = 0.$$

Hieraus ersehen wir zunächst, daß in den Punkten der durch die Brennpunktlinie gelegten achsensenkrechten Ebene die Energie *parallel der Achse des Bündels* strömt und zwar wegen

$(\overline{\mathfrak{E}}_x)_{x=0} \geq 0$ von negativen zu positiven Werten von x . Sie verschwindet in dieser Ebene vollständig an den Stellen $z = \frac{n}{2\hat{r}}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ (Fig. 2).

Betrachten wir irgendeinen Aufpunkt mit den Koordinaten $x_0 > 0$, $z_0 > 0$, und fragen wir, welche Beziehung besteht zwischen den Komponenten der Energieströmung in *diesem* Punkte und den entsprechenden Komponenten in den Punkten $x = -x_0$, $z = +z_0$ bzw. $x = +x_0$, $z = -z_0$ und endlich $x = -x_0$, $z = -z_0$.

1. $x = -x_0$, $z = +z_0$.

Durch einfaches Ersetzen von x_0 durch $-x_0$ erkennt man, daß

$$(\xi_2)_{x=-x_0, z=+z_0} = -i(\xi_1)_{x=+x_0, z=+z_0} ; \quad (\xi_1)_{x=-x_0, z=+z_0} = -i(\xi_2)_{x=+x_0, z=+z_0}.$$

Ferner ist

$$(\Delta C)_{x=-x_0, z=+z_0} = +i(\Delta C)_{x=+x_0, z=+z_0} ; \quad (\Delta c)_{x=-x_0, z=+z_0} = -(\Delta c)_{x=+x_0, z=+z_0}$$

$$(\Delta S)_{x=-x_0, z=+z_0} = -i(\Delta S)_{x=+x_0, z=+z_0} ; \quad (\Delta s)_{x=-x_0, z=+z_0} = +(\Delta s)_{x=+x_0, z=+z_0}$$

Beachten wir endlich noch, daß

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}x} \right)_{x=-x_0} = -i \left(\frac{1}{\sqrt{2}x} \right)_{x=+x_0},$$

so folgt

$$(6) \quad (\overline{\mathfrak{E}}_x)_{x=-x_0, z=+z_0} = (\overline{\mathfrak{E}}_x)_{x=+x_0, z=+z_0} ; \quad (\overline{\mathfrak{E}}_z)_{x=-x_0, z=+z_0} = -(\overline{\mathfrak{E}}_z)_{x=+x_0, z=+z_0}.$$

2. $x = +x_0$, $z = -z_0$.

Zunächst ist

$$(\xi_2)_{x=+x_0, z=-z_0} = -(\xi_1)_{x=+x_0, z=+z_0} ; \quad (\xi_1)_{x=+x_0, z=-z_0} = -(\xi_2)_{x=+x_0, z=+z_0}$$



Betrag der Energieströmung in der zur Achse senkrechten Brennpunktliniensebene ($x = 0$)

für $\hat{r} = 0,1$

Fig. 2

und demnach

$$\begin{aligned} (\Delta C)_{\substack{x=+x_0 \\ z=-z_0}} &= +(\Delta C)_{\substack{x=+x_0 \\ z=+z_0}}; & (\Delta c)_{\substack{x=+x_0 \\ z=-z_0}} &= -(\Delta c)_{\substack{x=+x_0 \\ z=+z_0}} \\ (\Delta S)_{\substack{x=+x_0 \\ z=-z_0}} &= +(\Delta S)_{\substack{x=+x_0 \\ z=+z_0}}; & (\Delta s)_{\substack{x=+x_0 \\ z=-z_0}} &= -(\Delta s)_{\substack{x=+x_0 \\ z=+z_0}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(7) \quad (\overline{\mathfrak{E}}_x)^t_{\substack{x=+x_0 \\ z=-z_0}} = (\overline{\mathfrak{E}}_x)^t_{\substack{x=+x_0 \\ z=+z_0}}; \quad (\overline{\mathfrak{E}}_z)^t_{\substack{x=+x_0 \\ z=-z_0}} = -(\overline{\mathfrak{E}}_z)^t_{\substack{x=+x_0 \\ z=+z_0}}$$

$$3. \quad x = -x_0, \quad z = -z_0.$$

Durch Kombination von 1. und 2. folgt hierfür

$$(8) \quad (\overline{\mathfrak{E}}_x)^t_{\substack{x=-x_0 \\ z=-z_0}} = (\overline{\mathfrak{E}}_x)^t_{\substack{x=+x_0 \\ z=+z_0}}; \quad (\overline{\mathfrak{E}}_z)^t_{\substack{x=-x_0 \\ z=-z_0}} = +(\overline{\mathfrak{E}}_z)^t_{\substack{x=+x_0 \\ z=+z_0}}.$$

Beachten wir noch, daß für $z = 0$, d. h. für die Achse der Zylinderwelle, $\xi_2 = -\xi_1 = \hat{r}\sqrt{2x}$ ist, so folgt zunächst $(\Delta s)_{z=0} = 0$, $(\Delta c)_{z=0} = 0$ und demnach

$$(9) \quad \begin{cases} (\overline{\mathfrak{E}}_x)^t_{z=0} = \frac{c}{8\pi\sqrt{s}} \cdot \frac{4}{2x} [C^2 + S^2] \\ \quad = \frac{c}{8\pi\sqrt{s}} \left[\left(\frac{C(\xi)}{\xi} \right)^2 + \left(\frac{S(\xi)}{\xi} \right)^2 \right] \cdot 4\hat{r}^2 \\ (\overline{\mathfrak{E}}_z)^t_{z=0} = 0, \end{cases}$$

wo jetzt C und S zu nehmen sind von $\xi = \hat{r}\sqrt{2x}$. Man erkennt sofort, daß überall $(\overline{\mathfrak{E}}_x)^t_{z=0} > 0$ ist, daß also in den Punkten der Achse der Zylinderwelle die Energie parallel dieser Achse in Richtung der Lichtfortpflanzung strömt, wie dies ja sowohl physikalisch als auch wegen der in (6), (7), (8) zum Ausdruck gebrachten Symmetrieeigenschaft zu erwarten war. Sie nimmt indessen nicht, wie man nach der geometrischen Optik erwarten sollte, *monoton* mit der Entfernung von der Brennpunktlinie ab, sondern ist gewissen Größenschwankungen unterworfen, wie sich dies leicht mit Hilfe der Cornuschen Spirale zeigen läßt (Fig. 3).

Da für alle Punkte $x > 0$, $z \geq 0$, auf die wir uns bei den folgenden Betrachtungen wegen (6), (7), (8) beschränken können, $\xi_2 \neq \xi_1$ (genauer: $\xi_2 = \xi_1 + 2\hat{r}\sqrt{2x} > \xi_1$) ist, so ist für sie $(\Delta C)^2 + (\Delta S)^2 > 0$, also auch $(\overline{\mathfrak{E}}_x)^t_{z=0} > 0$. Ganz allgemein können wir demnach sagen, daß für *alle* Punkte des Raumes

$$\overline{\mathfrak{E}}_x^t \geq 0$$

ist, wobei das Gleichheitszeichen nur für einige Punkte der durch die Brennpunkte gelegten achsensenkrechten Ebene $x = 0$ gilt, nämlich für die Punkte $x = 0, z = \frac{n}{2\hat{r}}$, wo $n = 1, 2, 3 \dots$

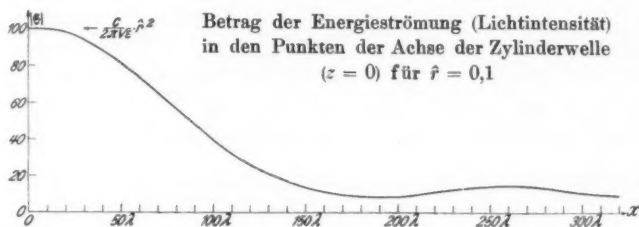
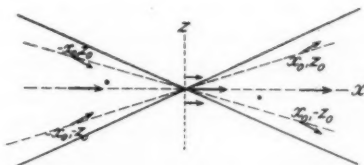


Fig. 3

Nach dem bisher Gesagten können wir ganz schematisch die Richtung der Energieströmung durch die folgende Fig. 4 charakterisieren, wobei natürlich zu beachten ist, daß die Richtung der Energieströmung außer für die Punkte $z = 0$ im allgemeinen



Schematische Darstellung der Energieströmung

Fig. 4

nicht (wenigstens nicht *genau*) mit der Richtung der geometrisch-optischen Lichtstrahlen zusammenfallen wird.

Dies erkennen wir sofort, wenn wir uns den allgemeinen Ausdruck (3) für $\bar{\mathcal{E}}_z^t$ in zwei Anteile aufgespalten denken, in

$$(\bar{\mathcal{E}}_z^t)^I = \frac{c}{8\pi\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{2x}} (\Delta C \cdot \Delta s - \Delta S \cdot \Delta c)$$

und

$$(\bar{\mathcal{E}}_z^t)^{II} = \frac{c}{8\pi\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{z}{x} [(\Delta C)^2 + (\Delta S)^2].$$

Durch $\overline{\mathfrak{E}}_x^t$, $(\overline{\mathfrak{E}}_x^t)^{II}$ ist eine Energieströmung bestimmt, die die Richtung der geometrisch-optischen Lichtstrahlen hat, da ja $(\overline{\mathfrak{E}}_x^t)^{II} = \frac{z}{x} \overline{\mathfrak{E}}_x^t$ ist. (Diese Beziehung gilt — außer für $x = 0$, für die schon (3) nicht galt — überall, auch außerhalb des eigentlichen Strahlenbündels.) Dieser durch die Richtung der geometrisch-optischen Lichtstrahlen gegebenen Energieströmung ist noch eine zweite Energieströmung $(\overline{\mathfrak{E}}_x^t)^I$ überlagert, die senkrecht zur Achse der Zylinderwelle gerichtet ist. Ob dieser Zerlegung von $\overline{\mathfrak{E}}_x^t$ in zwei Anteile irgendeine physikalische Bedeutung zukommt, läßt sich natürlich nicht entscheiden.

Wir betrachten jetzt die Punkte irgendeiner beliebig vorgegebenen achsensenkrechten Ebene mit $x > 0$ und beschränken uns hier wieder den Symmetrieverhältnissen entsprechend auf $z \geq 0$. Aus (4) folgt, daß für $z = 0$

$$\xi_2 > 0, \quad \xi_1 = -\xi_2 < 0$$

ist und daß

$$\xi_2 = \xi_1 + 2f\sqrt{2x} > \xi_1 \quad \text{ist.}$$

Schreiten wir mit unserem Aufpunkte in der willkürlich gewählten Ebene vom Punkte $z = 0$ zu Punkten mit $z > 0$, so nimmt ξ_2 allmählich immer mehr ab, wird für $z = x f$, also etwa dort, wo die Ebene von den Randstrahlen geschnitten wird, gleich Null, um im Schattengebiet negativ zu werden. Der Wert von ξ_1 dagegen rückt im konstanten Abstände $2f\sqrt{2x}$ von ξ_2 vor diesem Werte her von seinem an und für sich schon auf dem negativen Zweige der Cornuschen Spirale liegenden Orte in den negativen Windungspunkt jener Spirale hinein, wird also absolut genommen dauernd größer. Wählen wir die betreffende achsensenkrechte Ebene nun weit von der Brennpunktlinie entfernt, so daß also x ziemlich groß wird, so wird auch $(\xi_2)_{z=0}$ entsprechend groß. Das Gleiche gilt dann auch wegen $|\xi_1| > |(\xi_2)_{z=0}|$ in allen Punkten $z \geq 0$ dieser Ebene für $|\xi_1|$. Für große Werte von $|\xi|$ können wir bekanntlich die Fresnelschen Integrale in hinreichender Genauigkeit ersetzen durch

$$C(\xi) = 0,5 + \frac{1}{\pi \xi} \sin \frac{\pi}{2} \xi^2,$$

$$S(\xi) = 0,5 - \frac{1}{\pi \xi} \cos \frac{\pi}{2} \xi^2.$$

Da stets $|\xi_1| > |\xi_2|$, so ist die angenäherte Darstellung der Fresnelschen Integrale sicher immer dann für ξ_1 zulässig, wenn sie es für ξ_2 ist. Für ξ_2 aber können wir sie hier als hinreichend genau ansehen, sobald $\xi_2 > 5$ ist. Dies ist in der Umgebung der Achse der Fall, wenn $x > \frac{25}{2f^2}$ (bei $f = 0,1$ also, wenn $x > 1250 \lambda$), und gilt in den achsensenkrechten Ebenen mit noch wesentlich größerem Abstände von der Brennlinie, also für $x \gg \frac{12,5}{f^2}$, bis in die Nähe der Randstrahlen, nämlich bis zum Werte $z = x f - 2,5 \sqrt{2x}$.

z/x gibt die Richtung des durch den Punkt x, z hindurchgehenden Lichtstrahles. Die angegebene Annäherung für $C(\xi)$ und $S(\xi)$ ist für alle Punkte im Innern des Strahlenbündels gültig, für die

$$-\left(f - 2,5 \sqrt{\frac{2}{x}}\right) \leq \frac{z}{x} \leq +\left(f - 2,5 \sqrt{\frac{2}{x}}\right).$$

Außerdem gilt sie natürlich auch wieder im Schatten, sobald

$$\left|\frac{z}{x}\right| \geq f + 2,5 \sqrt{\frac{2}{x}}$$

ist. Nur in der relativ engen Umgebung der Randstrahlen

$$f - 2,5 \sqrt{\frac{2}{x}} < \left|\frac{z}{x}\right| < f + 2,5 \sqrt{\frac{2}{x}}$$

die in Fig. 5 schraffiert gezeichnet ist, ist sie nicht anwendbar.



Die schraffierten Gebiete — die wir nach $x = 0$ zu beide noch so fortgesetzt denken können, daß ihre äußeren Begrenzungslinien für $x = 0$ sich der $\pm z$ -Achse asymptotisch nähern — bezeichnen diejenigen Bereiche, in denen die Richtung der Energieströmung wesentlich von der Richtung der geometrisch-optischen Lichtstrahlen abweicht (s. u.)

Fig. 5

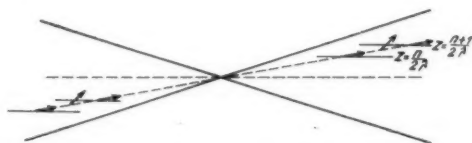
Die genannten Näherungen für $C(\xi)$ und $S(\xi)$ gestatten dort, wo sie gültig sind, besonders im Innern des Bündels, wich-

tige prinzipielle Aussagen über die Richtung der Energieströmung. Es wird nämlich

$$\frac{1}{\pi \sqrt{2x}} (\Delta C \cdot \Delta s - \Delta S \cdot \Delta c) = \frac{1}{\pi^2} \frac{z}{x^2 \hat{\rho}^2 - z^2} (1 - \cos 4\pi z \hat{\rho}).$$

Dies verschwindet für $z = \frac{n}{2\hat{\rho}}$, wo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, bei $\hat{\rho} = 0,1$ also für $z = 5, 10, 15, 20, \dots \lambda$. An diesen Stellen verschwindet daher auch $(\mathfrak{E}_z^t)^I$, so daß sich \mathfrak{E}_z^t hier auf $(\mathfrak{E}_z^t)^{II}$ reduziert. Das aber heißt, daß an diesen Stellen die Energieströmung in ihrer Richtung mit derjenigen der geometrisch-optischen Lichtstrahlen zusammenfällt. Die durch diese Eigenschaft ausgezeichneten Punkte liegen auf Parallelen zur Achse des Bündels in gegenseitigem Abstände $\frac{1}{2\hat{\rho}}$. Diese Parallelen schneiden die durch die Brennpunktlinie gelegte achsensenkrechte Ebene gerade in den Punkten, in denen dort volle Dunkelheit herrscht.

Da stets $(1 - \cos 4\pi z \hat{\rho}) \geq 0$ ist und bei $0 \leq z < x\hat{\rho}$ auch $\frac{z}{x^2 \hat{\rho}^2 - z^2} > 0$ ist, so weicht in den zwischen den ge-



Schematische Darstellung der Energieströmung

Fig. 6

nannten Parallelen liegenden Punkten die Energieströmungsrichtung von der Richtung der Lichtstrahlen in dem Sinne ab, daß sie *im Gebiete hinter der Brennpunktlinie* (natürlich immer genügend weit von dieser entfernt) etwas stärker *zum Schattengebiete hin*, dagegen *im Gebiete vor der Brennpunktlinie* etwas stärker *zur Achse des Bündels hindrängt*, wie dies Fig. 6 schematisch anzudeuten versucht.

Fragen wir nun noch, wie groß denn die eben erwähnte Abweichung der Energieströmungsrichtung von der Richtung der Lichtstrahlen ist. Zu diesem Zwecke haben wir uns über

die Größenordnung von $\overline{\mathcal{E}}_x^t$ sowie von $(\overline{\mathcal{E}}_x^t)^I, (\overline{\mathcal{E}}_x^t)^{II}$ Klarheit zu verschaffen. Da es nur auf das Verhältnis dieser Größen ankommt, so lassen wir den gemeinschaftlichen Faktor

$$\frac{c}{8\pi\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{2x} \text{ im folgenden unberücksichtigt.}$$

Unsere Überlegungen sollten sich nur auf solche Punkte beziehen, für die $\xi_2 > 5$ und demnach $\xi_1 < -5$ ist. Daraus folgt, daß $1,7 < (\Delta C)^2 + (\Delta S)^2 < 2,4$, also $(\Delta C)^2 + (\Delta S)^2$ von der Größenordnung 2 ist. Demnach ist

$$0 \leq \frac{z}{x} [(\Delta C)^2 + (\Delta S)^2] \approx 2 \frac{z}{x} < 2\hat{r} (= 0,2).$$

Ferner war

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2x}} (\Delta C \cdot \Delta S - \Delta S \cdot \Delta C) = \frac{1}{\pi^2} \frac{z}{x^2 \hat{r}^2 - z^2} (1 - \cos 4\pi z \hat{r}).$$

Da wir nur Werte

$$0 \leq z < x\hat{r} - 2,5\sqrt{2x} < x\hat{r}$$

betrachten, so ist

$$\frac{z}{x^2 \hat{r}^2 - z^2} < \frac{x\hat{r} - 2,5\sqrt{2x}}{5x\hat{r}\sqrt{2x} - 12,5x} = \frac{1}{2,5\sqrt{2x}} \frac{0,2\hat{r}\sqrt{2x} - 1}{0,4\hat{r}\sqrt{2x} - 1}.$$

Wegen unserer Voraussetzung

$$x > \frac{12,5}{\hat{r}^2} (= 1250\lambda)$$

folgt hieraus

$$\frac{1}{\pi^2} \frac{z}{x^2 \hat{r}^2 - z^2} (1 - \cos 4\pi z \hat{r}) < \frac{2}{5\pi^2 \sqrt{2x}} < \frac{2\hat{r}}{25\pi^2} \left(\approx \frac{1}{1230} \right).$$

Bilden wir jetzt mit diesen Werten das Verhältnis von $\overline{\mathcal{E}}_x^t$ und $\overline{\mathcal{E}}_x^t$, um die Richtung der Energieströmung zu erhalten, und bezeichnen wir den Richtungswinkel durch $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$, wo α der Richtungswinkel des durch den Aufpunkt hindurchgehenden Lichtstrahles ist, also $\text{tg } \alpha = \frac{z}{x}$, so wird

$$\frac{z}{x} + \frac{1,2\hat{r}}{25\pi^2} > \text{tg } \alpha' = \text{tg } (\alpha + \Delta\alpha) \approx \text{tg } \alpha + \text{tg } \Delta\alpha,$$

wegen $\frac{z}{x} = \text{tg } \alpha$ also:

$$\text{tg } \Delta\alpha < \frac{1,2\hat{r}}{25\pi^2}.$$

Bei $\hat{r} = 0,1$ heißt dies:

$$\Delta \alpha < 1' 40''.$$

In dem Gebiete

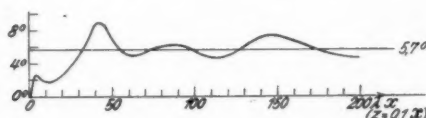
$$|x| > \frac{12,5}{\hat{r}^2} (= 1250 \lambda)$$

$$|z| < x\hat{r} - 2,5\sqrt{2x} (= 0,1x - 2,5\sqrt{2x})$$

weicht also die Energieströmungsrichtung nirgends um mehr als $\arctg \frac{1,2\hat{r}}{25\pi^2} (= 1' 40'')$ von der Richtung der geometrisch-optischen Lichtstrahlen ab, fällt dort also praktisch — und an den Stellen

$$z = \frac{n}{2\hat{r}} (= 5n) \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots < 2\hat{r}(x\hat{r} - 2,5\sqrt{2x})$$

sogar genau — mit diesen zusammen. Daß für $z = 0$ dies überall (nicht nur für $x > \frac{12,5}{\hat{r}^2}$) der Fall ist, sahen wir



Die Richtung der Energieströmung in den Punkten $z = x\hat{r}$, d. h. in den Punkten der Randstrahlen, für $\hat{r} = 0,1$

Fig. 7

bereits oben. Ebenso sahen wir, daß die durch die Brennpunkte gehende achsensenkrechte Ebene überall normal zu sich selbst von Energie durchströmt wird.

Um auch über die bisher nicht betrachteten Gebiete eine Aussage über die Energieströmungsrichtung machen zu können, haben wir sie nach den Formeln (3) zahlenmäßig für die Gerade $z = x\hat{r}$, also für die Punkte der Randstrahlen, für $\hat{r} = 0,1$ berechnet. Die geometrische Optik verlangt hier natürlich überall den Wert $\tg \alpha = 0,1$, d. h. $\alpha = 5,7^\circ$. Die Richtung der Energieströmung weicht hiervon mehr oder weniger stark ab, um den geometrisch-optischen Wert $5,7^\circ$ hin und her pendelnd, wie dies Fig. 7 zeigt. Die zugehörigen Energiebeträge $\sqrt{(\mathfrak{E}_x^t)^2 + (\mathfrak{E}_z^t)^2}$ zeigt Fig. 8.

Zeichnungen, die unseren Fig. 2, 3 und 8 völlig entsprechen, allerdings für $f = 0,05$, finden sich bereits in einer Arbeit von Debye.¹⁾ Es wurde dort die Lichtintensität durch den zeitlichen Mittelwert des Quadrates der elektrischen

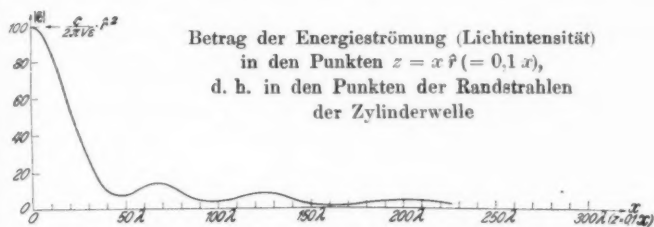


Fig. 8

Amplitude definiert, was praktisch mit dem Betrage des Energieströmungsvektors identisch ist.

In Fig. 9 geben wir noch eine Darstellung der „Kurven gleicher Intensität“ für die Umgebung der Brennnlinie unserer Zylinderwelle, wobei wieder $f = 0,1$ gewählt wurde. Sie wurde

Lichtverteilung in der Umgebung der Brennnlinie einer Zylinderwelle. Ganze Öffnung: $2a = 11,4^\circ$



Kurven gleicher Intensität. Die Figur ist gespiegelt zu denken an der x -Achse, an der z -Achse und an dem Punkte ($x = 0; z = 0$), dem Brennpunkte. Die Zahlen mit gebogenem Pfeile geben die Intensität ($|E|^2$) in Prozenten der Brennpunktsintensität. Die geraden Pfeile (\uparrow) geben nur an, für welche achsensenkrechten Ebenen die Intensität zwecks Zeichnung dieser Figur genauer bestimmt wurde

Fig. 9

erhalten, indem noch für eine größere Zahl von achsensenkrechten Ebenen, nämlich für $x = 0; 20; 60; 100; 150; 180; 200; 220; 250; 300; 330 \lambda$, die Intensitätsverteilung berechnet wurde. Diese Berechnungen wurden mit Benutzung der

1) P. Debye, Ann. d. Phys. [4] 30. S. 755. 1909.

Cornuschen Spirale graphisch und mit Rechenschieber durchgeführt. (Das gleiche gilt für die Figg. 2, 3, 7 und 8.) Die Fig. 9 weist sehr große Ähnlichkeit auf mit einer entsprechenden Darstellung von Berek¹⁾, die sich aber auf die Umgebung des Brennpunktes einer Kugelwelle beziehen soll. Eingezeichnet wurden hier (Fig. 9) die Kurven nur für Punkte ($x \geq 0, z \geq 0$). Um die Figur zu vervollständigen, haben wir sie uns wegen (6), (7) und (8) an der x -Achse, der z -Achse und an dem Punkte ($x = 0, z = 0$), dem Schnittpunkt der Brennnlinie mit der xz -Ebene, gespiegelt zu denken.

Zusammenfassung

Die Richtung der Energieströmung in einer Zylinderwelle endlicher Öffnung wird an Hand von früher angegebenen Formeln eingehend diskutiert. Es zeigt sich, daß in genügender Entfernung von der Brennnlinie, sowohl vor als auch hinter ihr, im Innern des Strahlenbündels mit Ausnahme der Nachbarschaft der Randstrahlen die Richtung der Energieströmung mit derjenigen der geometrisch-optischen Lichtstrahlen zusammenfällt, daß dagegen in der Umgebung der Randstrahlen beide Richtungen derart voneinander abweichen, daß diejenige der Energieströmung bald mehr, bald weniger gegen die Achse des Strahlenbündels geneigt ist als die der Lichtstrahlen. In der Brennebene fließt die Energie an allen Stellen parallel zur Achse des Bündels. — Zum Schluß wird für eine Zylinderwelle eine Isophotendarstellung, d. h. eine Zeichnung der Kurven gleicher Helligkeit, in der Umgebung der Brennnlinie gegeben, die auf Grund vieler nicht mitveröffentlichter Kurven der Intensitätsverteilung in achsensenkrechten Ebenen erhalten wurde.

Neubabelsberg, im Dezember 1929.

1) M. Berek, Ztschr. f. Phys. **40**. S. 421. 1926.

(Eingegangen 18. Dezember 1929)

e
-
e
n
s
t
l.
n
n
t

e
n
r
r
-
g
-
n
e
e
n
l
-
r
e
n
n